CAPÍTULO 6

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE UMA ABORDAGEM ALGÉBRICA

Felipe Arante Matos
Mestre em Matemática pela Universidade Federa do Amazonas- UFAM
Frankson dos Santos e Santos
Doutor em Ciências da Educação pela Universidade de la Integracíon de las Américas- UNIDA

RESUMO

O presente artigo aborda o que os livros didáticos da Educação Básica se omitem por não possuir um público contingente de admiradores nessa fase de ensino. O objetivo deste é demonstrar todas as proposições de forma que qualquer admirador da Matemática consiga compreender as manipulações algébricas dos Critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 de maneira formal utilizando as ferramentas de divisibilidade constituinte da Teoria dos Números.

PALAVRAS-CHAVE: Álgebra, Teoria dos Números, Critério de Divisibilidade.

INTRODUÇÃO

O presente artigo é resultado de um trabalho desenvolvido para alunos pertencentes aos 9° anos da Escola Estadual Sebastião Norões de Manaus - AM, alunos este que possuem um desenvolvimento cognitivo mais apurado, capazes de se sobressair tanto no conhecimento matemático quanto no conhecimento das outras ciências, pois tanto nos preocupamos em buscar novas metodologias para que o aluno que possui dificuldade no ensino/aprendizagem possa ter um aproveitamento melhor do que está sendo exposto, que muitas vezes findamos cometendo o pecado de esquecer dos chamados “bons alunos”, pois os alunos que possuem um déficit de ensino/aprendizagem nos levam a maior parte do nosso tempo em salas de aulas. Tal atenção é focalizada somente nesses alunos, em alguns casos, findamos desencorajando/desestimulando o estudante que possui uma maior facilidade de aprendizagem em matemática, pois tudo fica fácil de mais e nós seres humanos somos motivados por desafios. Isso nos leva a um impasse, O que fazer para continuar atendendo a classe de alunos que possuem dificuldades de aprendizado sem desmotivar os “bons alunos”. Foi com intuito de atender a essas duas classes de alunos que criamos o projeto *Matemática*

Avançada, pois não queremos correr o risco de perder/desmotivar os nossos bons alunos.

No projeto *Matemática Avançada* se é estudado tópicos de matemática que não estão no seu componente curricular de sua serie, mas por sua vez de grande relevância para o seu aprendizado. Os tópicos abordados, alguns são de series anteriores e outros de series posteriores ao 9° ano. Neste artigo apresentaremos o tópico; *Critérios de Divisibilidade, o* objetivo deste não é simplesmente apresentar os critérios de divisibilidade mais sim, as suas justificativas, o porquê que da certo, ou seja, toda a matemática algébrica por traz de cada critério.

.

DIVISIBILIDADE

Definição: Dados dois números inteiros a e b, diremos que a divide b, denotaremos como a|b, quando existir um inteiro k € Z tal que b = k .a. Nesse caso, poderemos dizer também que a é um ***divisor*** ou um ***fator*** de *b* ou ainda que *b* é um ***múltiplo*** de *a* ou que *b* é ***divisível*** por *a*.

Demonstraremos a seguir algumas propriedades necessárias para a compreensão do tópico com todo rigor matemático exigido, porém utilizaremos uma linguagem bem sucinta para explicar a formalidade das demonstrações.

Proposição 2.1. Sejam a, b, c € Z, tais que a | (b ± c). Então a| b $\Leftrightarrow$ a |c.

Demonstração:

$\Rightarrow$Suponhamos que a | b + c $\rightarrow$ b + c = k_1.a, onde $k_1 \in \mathbb{Z}$ (1)

Agora se a|b $\rightarrow$ b = k_2.a, onde $k_2 \in \mathbb{Z}$ (2)

Substituindo a equação (2) na equação (1), temos:

b + c = k_1.a $\rightarrow k_2$.a + c =k_1.a $\rightarrow$c = $k_1.a$ - $k_2.a$ $\rightarrow$ c = (k_1 - k_2).a, como (k_1 - k_2) =k$\in \mathbb{Z}$, temos: c = k . a $\rightarrow$ a|c

$\Leftarrow$Como no caso anterior, suponhamos que a | b + c $\rightarrow$ b + c = k_1.a, onde $k_1 \in \mathbb{Z}$ (3)

Agora se a|c $\rightarrow$ c = k_2.a, onde $k_2 \in \mathbb{Z}$ (4)

Substituindo a equação (4) na equação (3), temos:

b + c = k_1.a $\rightarrow$b + $k_2.a$ = $k_1.a$ $\rightarrow$ b = $k_1.a$ - $k_2.a$ $\rightarrow$ b = (k_1 - k_2).a como (k_1 - k_2) =k$\in \mathbb{Z}$, temos: b = k . a $\rightarrow$ a|b.

Proposição 2.2. Dados a, b, c inteiros não nulos, temos que: a|b $\Rightarrow$ a|b . c

Demonstração: se a|b, $\rightarrow$ b = $k_1.a$ onde $k_1 \in \mathbb{Z}$ (5) multiplicando ambos os membros da equação (5) por c, temos:

b = $k_1.a$ $\rightarrow$ b . c = $k_1.c.a$, como $k_1.c$ = k$\in \mathbb{Z}$, temos que b . c = k . a $\rightarrow$ a|b . c

Proposição 2.3. Se a, b, c $\in \mathbb{Z}$, tais que a| b e a |c, então para todo x, y $\in \mathbb{Z}$ temos que:

Editora Epitaya | Rio de Janeiro-RJ | ISBN 978-85-94431-55-4 | 2024

a |(xb + yc).

Demonstração: Se a|b → b = k_1.a, onde $k_1 \in Z$ (6)
Se a|c → c = $k_2.a$, onde $k_2 \in Z$ (7)
substituindo a equação (6) e (7) na equação xb + yc, temos:
xb + yb= x. k_1.a + y. $k_2.a$ = (x. k_1 + y. k_2). a, como (x. k_1 + y. k_2) = k$\in Z$, obtemos o seguinte
xb + yb = k . a → a |(xb + yc).
a seguir veremos os critérios de divisibilidade por 2,3,4,5,6,7,8,9 e 10

Teorema: (*Critério de divisibilidade por 2)* Dado um número *a € N*, onde *a* tem *n* algarismo (com n ≥ 1). O número *a* pode ser escrito como:

a =$a_n\, 10^n + \, a_{n-1}\, 10^{n-1} + \cdots + \, a_2\, 10^2 + a_1\, 10^1 + \, a_0$ é divisível por 2 se, somente se, 2 divide a_0.

Demonstração: Dado *a* temos:
a = $a_n\, 10^n + \, a_{n-1}\, 10^{n-1} + \cdots + \, a_2\, 10^2 + a_1\, 10^1 + \, a_0$ → evidenciando 10, temos:
a = 10. $[a_n\, 10^{n-1} + \, a_{n-1}\, 10^{n-2} + \cdots + \, a_2\, 10^1 + a_1\,] + a_0$
a = $2.\underbrace{5.\ [a_n\, 10^{n-1} + \, a_{n-1}\, 10^{n-2} + \cdots + \, a_2\, 10^1 + a_1\,] + a_0}$

Chamaremos tal expansão de m = 5[$a_n 10^{n-1} + \, a_{n-1} 10^{n-2} + \cdots + a_2 10^1 +$ a_1], com isso :
a = 2m +a_0
⇒Suponhamos que 2│a_0, pela proposição (2.2) 2│2m, com isso temos pela proposição (2.3) que 2│2m +a_0, logo 2│a
⇐ Suponhamos que 2│a, reescrevendo a_0 = a –2m, como 2│2m, pela proposição (2.3) 2│ a – 2m, logo 2│a_0.

Teorema: (Critério de divisibilidade por 3) Dado um número *a € N*, onde *a* tem *n* algarismo (com n ≥ 1). O número *a* pode ser escrito como:

a =$a_n\, 10^n + \, a_{n-1}\, 10^{n-1} + \cdots + \, a_2\, 10^2 + a_1\, 10^1 + \, a_0$ é divisível por 3 se, somente se, 3 $a_n + \, a_{n-1} + \, ... + a_2 + a_1 + a_0$.

Demonstração: Dado *a* temos:
a = $a_n\, 10^n + \, a_{n-1}\, 10^{n-1} + \cdots + \, a_2\, 10^2 + a_1\, 10^1 + \, a_0$
a = $a_n(9+1)^n$ + $a_{n-1}(9+1)^{n-1}$ +... + $a_2(9+1)^2$ + $a_1(9+1)^1$ + a_0
a = $a_n(\underbrace{999 \ldots 9}_{\text{n vezes}} + 1)$ + $a_{n-1}(\underbrace{999 \ldots 9}_{\text{n-1 vezes}} + 1)$ + ... + $a_2.(\underbrace{99}_{\text{2 vezes}} + 1)$ + $a_1(\underbrace{9}_{\text{1 vez}} + 1)$ + a_0

a = $a_n\underbrace{(999 \ldots 9)}_{n\ \text{vezes}}+a_n.(1)+a_{n-1}\underbrace{(999 \ldots 9)}_{n-1\ \text{vezes}}+\ldots+a_2.\underbrace{(99)}_{2\ \text{vezes}}+a_2(1)+a_1\underbrace{(9)}_{1\ \text{vez}}+a_1(1)+a_0$

Reorganizando temos:

a=$a_n\underbrace{(999 \ldots 9)}_{n\ \text{vezes}}+a_{n-1}\underbrace{(999 \ldots 9)}_{n-1\ \text{vezes}}+\ldots+a_2.\underbrace{(99)}_{2\ \text{vezes}}+a_1\underbrace{(9)}_{1\ \text{vez}}+$ ($a_n + a_{n-1}$ +....+ a_2 + a_1+a_0)

Evidenciando o 9, temos:

a = 9[$a_n\underbrace{(111 \ldots 1)}_{n\ \text{vezes}}+a_{n-1}\underbrace{(111 \ldots 1)}_{n-1\ \text{vezes}}+\ldots+a_2.\underbrace{(11)}_{2\ \text{vezes}}+a_1\underbrace{(1)}_{1\ \text{vez}}$] + ($a_n + a_{n-1}$ +....+ a_2 + a_1+a_0)

a = 3 . $\underbrace{3[a_n\underbrace{(111 \ldots 1)}_{n\ \text{vezes}}+a_{n-1}\underbrace{(111 \ldots 1)}_{n-1\ \text{vezes}}+\ldots+a_2.\underbrace{(11)}_{2\ \text{vezes}}+a_1\underbrace{(1)}_{1\ \text{vez}}]}_{M\ €\ Z}$ + ($a_n + a_{n-1}$ +....+ a_2 + a_1+a_0)

Chamaremos de M a expansão

3[$a_n\underbrace{(111 \ldots 1)}_{n\ \text{vezes}}+a_{n-1}\underbrace{(111 \ldots 1)}_{n-1\ \text{vezes}}+\ldots+a_2.\underbrace{(11)}_{2\ \text{vezes}}+a_1\underbrace{(1)}_{1\ \text{vez}}$], com isso

a = 3m +($a_n + a_{n-1}$ +....+ a_2 + a_1+a_0)

→ Suponhamos que 3│($a_n + a_{n-1}$ +....+ a_2 + a_1+a_0), como pela proposição (2.2) 3│3m, com isso temos pela proposição (2.3) que 3│3m +($a_n + a_{n-1}$ +....+ a_2 + a_1+a_0), logo 3│a.

← Suponhamos que 3│a, reescrevendo ($a_n + a_{n-1}$ +....+ a_2 + a_1+a_0) = a – 3m, como 3│3m, pela proposição (2.3) 3│ a – 3m, logo 3│($a_n + a_{n-1}$ +....+ a_2 + a_1+a_0)

Teorema: *(Critério de divisibilidade por 4)* Dado um número *a € N*, onde *a* tem *n* algarismo (com n ≥ 1). O número *a* pode ser escrito como: a =$a_n\,10^n + a_{n-1}\,10^{n-1} + \cdots + a_2\,10^2 + a_1\,10^1 + a_0$ é divisível por 4 se, somente se, 4│$a_1\,10^1 + a_0$.

Demonstração: Dado *a* temos:

Editora Epitaya | Rio de Janeiro-RJ | ISBN 978-85-94431-55-4 | 2024

a = $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ → evidenciando 100, temos:

a = 100.[$a_n 10^{n-2} + a_{n-1} 10^{n-3} + \cdots + a_2$] + $a_1 10^1 + a_0$
a = $\underbrace{4.25.[\, a_n 10^{n-2} + a_{n-1} 10^{n-3} + \cdots + a_2 \,]}$ + $a_1 10^1 + a_0$

Chamaremos tal expansão de m = 25.[$a_n 10^{n-2} + a_{n-1} 10^{n-3} + \cdots + a_2$] com isso temos:
a = 4m + $a_1 10^1 + a_0$

→ Suponhamos que 4│ $a_1 10^1 + a_0$ como pela proposição (2.2) 4│4m, com isso temos pela proposição (2.3) que 4│4m + $a_1 10^1 + a_0$, logo 4│a

← Suponhamos que 4│a, reescrevendo $a_1 10^1 + a_0$ = a – 4m, como 4│4m, pela proposição (2.3) 4│ a – 3m, logo 4│$a_1 10^1 + a_0$.

Teorema:*(Critério de divisibilidade por 5)* Dado um número *a € N*, onde *a* tem *n* algarismo (com n ≥ 1). O número *a* pode ser escrito como: a =$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ é divisível por 5 se, somente se, 5│a_0.

Demonstração: Dado *a* temos
a = $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ → evidenciando 10, temos:

a = 10.[$a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \cdots + a_2 10^1 + a_1$] +$a_0$
a = $5\underbrace{.\ 2[\, a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \cdots + a_2 10^1 + a_1 \,]}$ +a_0

Chamaremos tal expansão de m = 2[$a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \cdots + a_2 10^1 + a_1$], com isso:
a = 5m +a_0

⇒Suponhamos que 5│a_0, como pela proposição (2.2) 5│5m, com isso temos pela proposição (2.3) que 5│5m +a_0, logo 5│a

⇐ Suponhamos que 5│a, reescrevendo a_0 = a –5m, como 5│5m, pela proposição (2.3)5│ a – 5m, logo 5│a_0.

Teorema: (*Critério de divisibilidade por 6)*Dado um número *a € N*, onde *a* tem *n* algarismo (com n ≥ 1). O número *a* pode ser escrito como: a =$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ é divisível por 6 se, somente se, é divisível por 2 e por 3.

Demonstração: Dado *a* temos

a = $a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$, pelo critério de divisibilidade por 2, temos que, para um número *a* ser divisível por 2, depende apenas de a_0. E pelo critério de divisibilidade por 3, temos que para *a* ser divisível por 3, depende apenas que a soma de seus algarismo seja divisível por 3. Quando um número cumpre essas duas exigências, dizemos que esse número é divisível por 6.

Teorema: (*Critério de divisibilidade por 7)*Dado um número natural a, considere a = 10n + b, onde b é o algarismo das unidades, a é divisível por 7 se, e somente se, n – 2b é divisível por 7, ou seja, $7 \mid a \Leftrightarrow 7 \mid n - 2b$.

Demonstração:
$\Rightarrow$ Suponhamos que n – 2b seja divisível por 7, ou seja, n – 2b é um número da forma 7k, onde k $\in \mathbb{Z}$. com isso temos:
n – 2b = 7k → multiplicando ambos os membros da igualdade por 10, temos:
10n – 20b = 70k → adicionando (+21b) a ambos os membros da igualdade, temos:
10n – 20b + 21b = 70k + 21b
10n + b = 7(10k + 3b) → como (10k + 3b) = $k_1 \in \mathbb{Z}$, temos:
10n + b = $7k_1 \therefore 7 \mid 10n + b$

$\Leftarrow$ Suponhamos agora que *a* seja divisível por 7, ou seja, *a* é da forma 7k, onde $k_1 \in \mathbb{Z}$.
a = 7k → 10n + b = 7k → podemos escrever b = 21b – 20b para facilitar na demonstração.
10n + (21b – 20b) = 7k → adicionaremos (-21b) a ambos os membros da equação.
10n + (21b – 20b) – 21b = 7k – 21b
10n – 20b = 7(k – 3b) →como (k – 3b) = $k_1 \in \mathbb{Z}$
10n – 20b = $7k_1$ → evidenciando 10, temos:
10(n – 2b) = $7k_1$→ como mdc(7, 10) = 1, e $7 \mid 10(n - 2b)$, concluímos então que $7 \mid n - 2b$.

Teorema:*(Critério de divisibilidade por 8)* Dado um número *a € N*, onde *a* tem *n* algarismo (com n ≥ 1). O número *a* pode ser escrito como: a =$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ é divisível por 8 se, somente se, $8 \mid a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$

Demonstração: Dado *a* temos:
a = $a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ → evidenciando 1000, temos:

a = 1000.[$a_n 10^{n-3} + a_{n-1}10^{n-4} + \cdots + a_3$] + $a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$

Editora Epitaya | Rio de Janeiro-RJ | ISBN 978-85-94431-55-4 | 2024

a = $\underbrace{8.125.\ [\ a_n 10^{n-3} + a_{n-1} 10^{n-4} + \cdots + a_3\ ]}$ + $a_2\, 10^2 + a_1\, 10^1 + a_0$

Chamaremos tal expansão de m = 125. [$a_n 10^{n-3} + a_{n-1} 10^{n-4} + \cdots + a_3$]
com isso temos:
a = 8m + $a_2\, 10^2 + a_1\, 10^1 + a_0$

⇒ Suponhamos que 8│ $a_2\, 10^2 + a_1\, 10^1 + a_0$, como pela proposição (2.2) 8│8m, com isso temos pela proposição (2.3) que 8│8m + $a_2\, 10^2 + a_1\, 10^1 + a_0$, logo 8│a

⇐ Suponhamos que 8│a, reescrevendo $a_2\, 10^2 + a_1\, 10^1 + a_0$ = a – 8m, como 8│8m, pela proposição (2.3) 8│ a – 8m, logo 8│$a_2\, 10^2 + a_1\, 10^1 + a_0$.

Teorema: *(Critério de divisibilidade por 9)*Dado um número *a* € *N*, onde *a* tem *n* algarismo (com n ≥ 1). O número *a* pode ser escrito como: a =$a_n\, 10^n + a_{n-1}\, 10^{n-1} + \cdots + a_2\, 10^2 + a_1\, 10^1 + a_0$ é divisível por 9 se, somente se, 9│$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$.

Demonstração: Dado *a* temos:
a = $a_n\, 10^n + a_{n-1}\, 10^{n-1} + \cdots + a_2\, 10^2 + a_1\, 10^1 + a_0$
a = $a_n(9+1)^n + a_{n-1}(9+1)^{n-1} + \ldots + a_2(9+1)^2 + a_1(9+1)^1 + a_0$
a = $a_n(\underbrace{999 \ldots 9}_{\text{n vezes}} + 1) + a_{n-1}(\underbrace{999 \ldots 9}_{\text{n-1 vezes}} + 1) + \ldots + a_2.(\underbrace{99}_{\text{2 vezes}} + 1) + a_1(\underbrace{9}_{\text{1 vez}} + 1) + a_0$

a = $a_n(\underbrace{999 \ldots 9}_{\text{n vezes}}) + a_n.(1) + a_{n-1}(\underbrace{999 \ldots 9}_{\text{n-1 vezes}}) + a_{n-1}.(1) + \ldots + a_2.(\underbrace{99}_{\text{2 vezes}}) + a_2(1) + a_1(\underbrace{9}_{\text{1 vez}}) + a_1(1) + a_0$

Reorganizando temos:
a=$a_n(\underbrace{999 \ldots 9}_{\text{n vezes}}) + a_{n-1}(\underbrace{999 \ldots 9}_{\text{n-1 vezes}}) + \ldots + a_2.(\underbrace{99}_{\text{2 vezes}}) + a_1(\underbrace{9}_{\text{1 vez}})$+ ($a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$)

Evidenciando o 9, temos:
a = 9[$a_n(\underbrace{111 \ldots 1}_{\text{n vezes}}) + a_{n-1}(\underbrace{111 \ldots 1}_{\text{n-1 vezes}}) + \ldots + a_2.(\underbrace{11}_{\text{2 vezes}}) + a_1(\underbrace{1}_{\text{1 vez}})$] + ($a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$)

Chamaremos tal expansão de m =
[$a_n(111 \ldots 1) + a_{n-1}(111 \ldots 1) + \ldots + a_2.(11) + a_1(1)$], com isso temos:
n vezes n-1 veze 2 vezes 1 vez

a = 9m +(a_n + a_{n-1} +....+ a_2 + a_1+a_0)

→ Suponhamos que 9│(a_n + a_{n-1} +....+ a_2 + a_1+a_0), como pela proposição (2.2) 9│9m, com isso temos pela proposição (2.3) que 9│9m +(a_n + a_{n-1} +....+ a_2 + a_1+a_0), logo 9│a.

← Suponhamos que 9│a, reescrevendo (a_n + a_{n-1} +....+ a_2 + a_1+a_0) = a – 9m, como 9│9m, pela proposição (2.3) 9│ a – 9m, logo 9│(a_n + a_{n-1} +....+ a_2 + a_1+a_0)

Teorema: *(Critério de divisibilidade por 10).* Dado um número *a € N*, onde *a* tem *n* algarismo (com n ≥ 1). O número *a* pode ser escrito como: a =$a_n\, 10^n + a_{n-1}\, 10^{n-1} + \cdots + a_2\, 10^2 + a_1\, 10^1 + a_0$ é divisível por 10 se, somente se, 10│a_0.

Demonstração: Dado *a* temos
a = $a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ → evidenciando 10, temos:
a = 10.[$a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \cdots + a_2 10^1 + a_1$] +$a_0$

Chamaremos tal expansão de m = [$a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \cdots + a_2 10^1 + a_1$], com isso temos:
a = 10m +a_0

⇒Suponhamos que 10│a_0, como pela proposição (2.2) 10│10m, com isso temos pela proposição (2.3) que 10│10m +a_0, logo 10│a

⇐ Suponhamos que 10│a, reescrevendo a_0 = a –10m, como 10│10m, pela proposição (2.3)10│ a – 10m, logo 10│a_0.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por fim, esperamos que esse trabalho seja de grande proveito para estudantes e professores da educação básica e como também para estudante de graduação em Matemática que estejam interessados em saber o porquê que os Critérios de Divisibilidades funcionam

REFERÊNCIAS

MATOS, Felipe Arante. Uma abordagem para a difusão das equações diofantinas lineares e quadráticas. 2019.

HEFEZ, Abramo. Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, p. 42, 2014.

HEFEZ, Abramo. Elementos de aritmética. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

Editora Epitaya | Rio de Janeiro-RJ | ISBN 978-85-94431-55-4 | 2024

LANDAU, Edmund. Teoria elementar dos números. Ciência Moderna, 2002.

MARTINEZ, Fabio Brochero et al. Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. 2010.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Tópicos de Matemática Elementar: teoria dos números. 2. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.(coleção professor de matemática; 28)

SANTOS, José Plínio de Oliveira. Introdução à teoria dos números. Rio de Janeiro: IMPA, v. 3, 2000.