

**Lucia Helena Guimarães Cardoso**

Professora Doutora - UNESA

**Miguel Henrique de Oliveira Costa**

Professor Doutor - UNESA

## RESUMO

O presente trabalho visa a análise estática de uma treliça, que é um modelo estrutural simples e de comportamento conhecido, confrontando o método analítico de obtenção da matriz de rigidez, deslocamentos e reações nodais, com os resultados obtidos nas modelagens numéricas no software ANSYS, que tem como base de cálculo o método dos elementos finitos (MEF). Para tal análise foi considerado as condições de contorno impostas no modelo estrutural, tais como: material, carga aplicada e vinculações. As etapas do método analítico foram desenvolvidas com o auxílio do software MATLAB e tem por finalidade demonstrar toda a robustez do formalismo matricial existente no MEF, bem como a forma de aplicar neste formalismo, as considerações pertinentes às condições de contorno do modelo para obter a análise desejada. Para modelagem numérica do sistema proposto foram empregadas técnicas usuais de discretização destacando a importância do entendimento teórico alinhado ao método numérico, garantindo uma modelagem estrutural adequada a partir da correta escolha dos elementos utilizados na discretização estrutural. A escolha adequada dos elementos permite maximizar a eficiência computacional, diminuindo o seu tempo de resposta e alcançando resultados satisfatórios para a estrutura analisada.

**Palavras-chave:** MEF; treliça; modelagem; ANSYS.

## INTRODUÇÃO

A análise estrutural está sempre buscando modelos matemáticos que representem uma dada estrutura com uma precisão razoável, a partir das suas diversas características tais como geometria, componentes materiais, condições de contorno, tipos de cargas e muito mais. Assim, para dimensionar a estrutura real conforme as recomendações normativas é preciso obter resultados coerentes e uma modelagem computacional concisa e robusta. Dessa forma, a simulação estrutural atualmente é uma das principais aliadas dos engenheiros modernos que buscam soluções potencializadas em seus projetos.

Embora existam métodos analíticos para cálculos estruturais que permitam obter algumas variáveis a partir da consideração de certos fatores, nem sempre estes métodos são viáveis para associar a modelos complexos nos moldes convencionais. Portanto, diversos problemas encontrados na realidade não possuem simplificações viáveis para serem analisados, sendo necessária a adoção de alguns procedimentos para a chegar em um resultado correto. Com a disseminação dos computadores que tornou possível a sofisticação dos procedimentos que envolvem o dimensionamento de tais estruturas, considerando a interação dos diversos elementos, aproximando-se ao que ocorre de forma mais real.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um tipo de processamento numérico que geralmente é implementado em softwares estruturais e surgiu para ser utilizado na análise de problemas da engenharia em geral, uma vez que apresentam equações diferenciais em sua formulação, determinando soluções de problemas de difícil resolução. O método tem como base o uso de aproximações em alternativa aos conhecidos métodos analíticos clássicos, pois estes possuem limitações para análises estruturais mais complexas, como por exemplo, estruturas com mais de três esforços desconhecidos (ASSAN, 2020).

No MEF é necessário discretizar a estrutura, ou seja, uma região complexa do contínuo deve ser dividida em formas geométricas mais simples, chamadas elementos. Assim, deve-se escolher esses elementos na hora da modelagem de forma a otimizar o comportamento global da estrutura, visando o equilíbrio entre a melhor aproximação da resposta estrutural real e o rápido retorno computacional.

Neste trabalho uma treliça plana foi discretizada por elementos de barra, destacando o número de graus de liberdade por nó e mostrando que certos elementos não possuem discretização, apenas verificações axiais. Um software de elementos finitos pode oferecer vários tipos de elementos lineares e o usuário do software terá de escolher para a modelagem, o elemento que apresentará a melhor solução para a estrutura analisada em um menor tempo possível.

Assim, faz-se necessário conhecer a matemática envolvida por trás dos programas de MEF, evidenciando o diferencial da engenharia civil neste tipo de aplicação. Vale a pena destacar que os elementos possuem nós que se conectam transmitindo os esforços e tensões aos elementos adjacentes, formando uma malha e quanto mais complexo forem os elementos, maior será o seu grau de liberdade.

No MEF, os graus de liberdade influenciam na matriz de rigidez estrutural o que conseqüentemente estará associado ao tempo de resposta computacional para a resolução das equações que definem o problema estudado. Uma vez entendidos estes parâmetros, o presente estudo continua com a análise de modelagens estruturais aplicando três diferentes tipos de elementos lineares em cada uma delas, visando destacar a diferença de esforço computacional consumido para gerar os resultados esperados.

## **METODOLOGIA**

No presente trabalho foi utilizada a linguagem APDL (*Ansys Parametric Design Language*) existente no software ANSYS, reduzindo o tempo dispensado no pré-processamento para implementação do MEF para a análise de uma treliça plana, visando a determinação de seus deslocamentos nodais, esforços e tensões nos elementos de barra, bem como das reações de apoio a partir de três modelagens discretizadas com diferentes tipos de elementos.

Para implementação do código, primeiramente foram introduzidas as propriedades do material e de geometria da estrutura, inicializando as variáveis concernentes ao módulo de elasticidade e área da seção transversal dos elementos de barra. Em sequência, foram acrescentados os parâmetros de entrada responsáveis pela identificação da posição e tipo de cada elemento no interior da estrutura, a partir de variáveis correspondentes aos elementos da treliça, em termos de ligações entre as barras e as coordenadas dos nós.

Os últimos parâmetros a serem inseridos se referem ao carregamento externo imposto à estrutura e a aplicação das condições de contorno, caracterizadas pela restrição de parte dos seus graus de liberdade. O primeiro foi representado pelo vetor força composto de carga concentrada atuante sobre um nó superior central e o segundo foi atribuído às condições de apoio da treliça.

Após inicialização dos parâmetros de entrada, o código procede os cálculos pertinentes para um elemento, através de suas propriedades pré-definidas e em seguida realiza a conexão entre todos os elementos que formam a estrutura como um todo. O processo termina com a obtenção dos resultados em termos de deslocamentos, reações e tensões, calculados a partir da matriz de rigidez global.

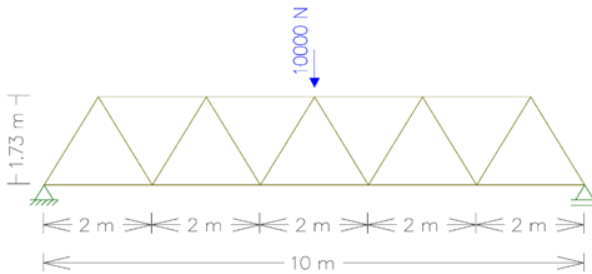
Com o intuito de constatar a eficiência do método para a resolução de estruturas simples como treliças planas, foram realizados também os cálculos analíticos para posterior comparação entre os resultados obtidos de forma analítica com os encontrados no ANSYS, propiciando dessa maneira, uma verificação do desempenho e aplicabilidade do método para resolução de problemas de análise estrutural, bem como a discussão da escolha adequada do tipo de elemento para a modelagem, que alinhe resultados coerentes a menor esforço computacional.

## **MODELO ESTRUTURAL**

O modelo estrutural escolhido para o desenvolvimento deste trabalho, foi a treliça plana isostática equilátera do tipo Warren, mostrada na figura 1. A escolha deste modelo visou a simplificação dos cálculos analíticos a fim de evidenciar a importância dos métodos numéricos e a evolução das tecnologias para cálculos cíclicos. A treliça analisada consiste em um arranjo de 5 módulos compostos por barras circulares de 2 m de comprimento e

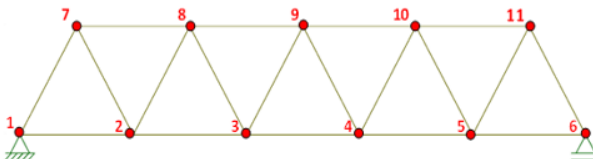
diâmetro de 39,09 mm, contendo 11 nós (numerados em vermelho na figura 2) e 19 elementos (numerados em azul na figura 3), cujas propriedades geométricas e de material estão detalhadas na tabela 1. Uma carga pontual de 10 kN foi considerada aplicada no nó superior central da estrutura, por ser uma posição simétrica em relação aos apoios.

Figura 1 - Treliza plana de estudo



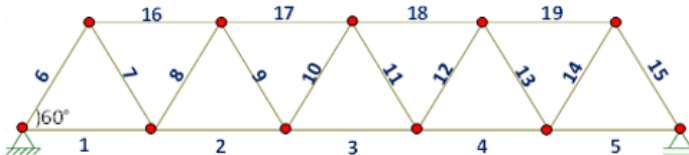
Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Figura 2 - Identificação dos nós



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Figura 3 - Identificação dos elementos



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Tabela 1 - Propriedades físicas e geométricas dos elementos da treliça

Área da seção transversal (mm <sup>2</sup> )	1200
Módulo de Elasticidade (MPa)	205000
Coefficiente de Poisson	0,3
Comprimento (mm)	2000
Momento de Inércia (mm <sup>4</sup> )	1,46.10 <sup>6</sup>

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

## MÉTODO MATRICIAL

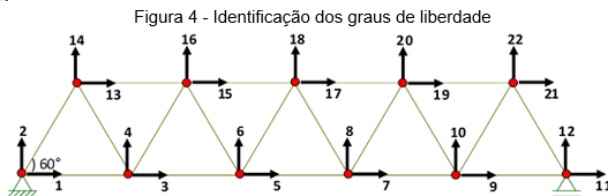
### Deslocamentos nodais

Para a obtenção dos deslocamentos nodais, foi utilizado o método matricial com o auxílio do software MATLAB para a execução dos cálculos mais complexos. Para a adoção do método, faz-se necessário a identificação dos graus de liberdade para cada nó no sistema global, como ilustrado na figura 4. Sabendo que cada nó possui 2 variáveis correspondentes aos possíveis deslocamentos nas direções globais no plano X e Y, então para a treliça com 11 nós, haverá um total de 22 graus de liberdade que corresponderá a uma matriz de rigidez estrutural quadrada de ordem 22.

A obtenção da matriz de rigidez estrutural é feita a partir do cálculo da matriz que transforma as forças do sistema global para o sistema local em cada um dos elementos que compõem a treliça, dada pela relação mostrada em (1), sendo necessária a determinação dos senos e cossenos do ângulo de orientação de cada elemento (Figura 3) com o eixo global.

$$[K^G] = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\text{sen}\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta\cos\theta & \text{sen}^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta & -\text{sen}^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\cos\theta\text{sen}\theta & \cos^2\theta & \cos\theta\text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta\cos\theta & -\text{sen}^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta & \text{sen}^2\theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal,  $L$  o comprimento e  $A$  a seção transversal do elemento.



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

### Matriz de rigidez global para cada elemento

A partir da expressão (1) para a matriz de rigidez de um elemento de treliça, foi calculado as matrizes de rigidez para cada elemento como apresentado a seguir, com os respectivos números associados aos graus de liberdade (Figura 4) em itálico:

- Elementos de 1 a 5 possuem a mesma matriz de rigidez, logo:

$$[K_1] = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_2] = \begin{matrix} & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_3] = \begin{matrix} & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_4] = \begin{matrix} & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_5] = \begin{matrix} & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Elementos de 6 a 15

$$[K_6] = \begin{matrix} & 1 & 2 & 13 & 14 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 13 \\ 14 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \sigma_3 & \sigma_1 & -\sigma_3 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & -\sigma_2 \\ -\sigma_3 & -\sigma_1 & \sigma_3 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & -\sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_7] = \begin{matrix} & 3 & 4 & 13 & 14 \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 13 \\ 14 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \sigma_3 & -\sigma_1 & -\sigma_3 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_1 & -\sigma_2 \\ -\sigma_3 & \sigma_1 & \sigma_3 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & -\sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_8] = \begin{matrix} & 3 & 4 & 15 & 16 \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 15 \\ 16 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \sigma_3 & \sigma_1 & -\sigma_3 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & -\sigma_2 \\ -\sigma_3 & -\sigma_1 & \sigma_3 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & -\sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_9] = \begin{matrix} & 5 & 6 & 15 & 16 \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 15 \\ 16 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \sigma_3 & -\sigma_1 & -\sigma_3 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_1 & -\sigma_2 \\ -\sigma_3 & \sigma_1 & \sigma_3 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & -\sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_{10}] = \begin{matrix} & 5 & 6 & 17 & 18 \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 17 \\ 18 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \sigma_3 & \sigma_1 & -\sigma_3 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & -\sigma_2 \\ -\sigma_3 & -\sigma_1 & \sigma_3 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & -\sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_{11}] = \begin{matrix} & 7 & 8 & 17 & 18 \\ \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 17 \\ 18 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \sigma_3 & \sigma_1 & -\sigma_3 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & -\sigma_2 \\ -\sigma_3 & -\sigma_1 & \sigma_3 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & -\sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_{12}] = \begin{matrix} & 7 & 8 & 19 & 20 \\ \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 19 \\ 20 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \sigma_3 & -\sigma_1 & -\sigma_3 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_1 & -\sigma_2 \\ -\sigma_3 & \sigma_1 & \sigma_3 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & -\sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_{13}] = \begin{matrix} & 9 & 10 & 19 & 20 \\ \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 19 \\ 20 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \sigma_3 & -\sigma_1 & -\sigma_3 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_1 & -\sigma_2 \\ -\sigma_3 & \sigma_1 & \sigma_3 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & -\sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_{14}] = \begin{matrix} & 9 & 10 & 21 & 22 \\ \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 21 \\ 22 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \sigma_3 & \sigma_1 & -\sigma_3 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & -\sigma_2 \\ -\sigma_3 & -\sigma_1 & \sigma_3 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & -\sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_{15}] = \begin{matrix} & 11 & 12 & 21 & 22 \\ \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \sigma_3 & -\sigma_1 & -\sigma_3 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_1 & -\sigma_2 \\ -\sigma_3 & \sigma_1 & \sigma_3 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & -\sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

onde:  $\sigma_1 = \frac{\sqrt{3} AE}{4L}$ ;  $\sigma_2 = \frac{3AE}{4L}$  e  $\sigma_3 = \frac{AE}{4L}$

- Elementos de 16 a 19 possuem a mesma matriz de rigidez, assim:

$$[K_{16}] = \begin{matrix} & 13 & 14 & 15 & 16 \\ \begin{matrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_{17}] = \begin{matrix} & 15 & 16 & 17 & 18 \\ \begin{matrix} 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_{18}] = \begin{matrix} & 17 & 18 & 19 & 20 \\ \begin{matrix} 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_{19}] = \begin{matrix} & 19 & 20 & 21 & 22 \\ \begin{matrix} 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

## Matriz de rigidez global estrutural

Para a determinação da matriz de rigidez estrutural de ordem 22x22, faz-se necessário superpor as matrizes dos elementos nas linhas e colunas correspondentes à numeração dos graus de liberdade dos nós compartilhados pelos elementos de acordo com a numeração exibida na figura 4. Logo, a matriz de rigidez global da treliça será dada por:

$$[K]_{22 \times 22} = \begin{pmatrix} \sigma_7 & \sigma_1 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_1 & -\sigma_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_3 & 0 & \sigma_5 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & -\sigma_6 & -\sigma_1 & -\sigma_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & \sigma_5 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & -\sigma_6 & -\sigma_1 & -\sigma_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & \sigma_5 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & -\sigma_6 & -\sigma_1 & -\sigma_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & \sigma_5 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & -\sigma_6 & -\sigma_1 & -\sigma_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & \sigma_7 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & \sigma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_1 & \sigma_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & -\sigma_6 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & -\sigma_6 & \sigma_1 & -\sigma_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & \sigma_5 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_1 & -\sigma_6 & \sigma_1 & -\sigma_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & \sigma_5 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_1 & -\sigma_6 & \sigma_1 & -\sigma_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & \sigma_5 & 0 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_1 & -\sigma_6 & \sigma_1 & -\sigma_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_1 & -\sigma_6 & \sigma_1 & -\sigma_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_1 & -\sigma_6 & \sigma_1 & -\sigma_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 \end{pmatrix}$$

onde:  $\sigma_1 = \frac{\sqrt{3} AE}{4L}$ ;  $\sigma_2 = -\frac{AE}{4L}$ ;  $\sigma_3 = -\frac{AE}{L}$ ;  $\sigma_4 = \frac{3AE}{2L}$

$\sigma_5 = \frac{5AE}{2L}$ ;  $\sigma_6 = \frac{3AE}{4L}$  e  $\sigma_7 = \frac{5AE}{4L}$

## Condições de contorno

A treliça considerada neste trabalho está submetida a uma força pontual de - 10 kN verticalmente para baixo, aplicada no grau de liberdade 18, conforme verificado na figura 1. Além disso, devido aos apoios nos nós 1 e 6, restringindo os deslocamentos nos graus de liberdade 1, 2 e 12, tem-se as reações de apoio  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_{12}$ . A partir deste raciocínio, o vetor global transposto de forças concentradas é dado por:



$$\{P\} = \{R_1 \ R_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ R_{12} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \text{ kN}$$

As restrições de deslocamento imposto na treliça, estão presentes em 3 graus de liberdade referentes aos nós 1 e 6, devido aos apoios. Assim, deve-se aplicar esta condição de contorno na matriz de rigidez estrutural de ordem 22x22, eliminando as linhas e colunas 1 e 2 relativos aos graus de liberdade em X e Y do nó 1, enquanto para o nó 6, deve-se eliminar a linha e coluna 12 referente ao grau de liberdade em Y, gerando uma matriz de rigidez quadrada de ordem 19 formada pelos coeficientes apresentados na matriz a seguir:

$$[K^G] = \begin{pmatrix} \sigma_6 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & \sigma_3 & -\sigma_1 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_4 & 0 & \sigma_6 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & \sigma_3 & -\sigma_1 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & \sigma_6 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & \sigma_3 & -\sigma_1 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & \sigma_6 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & \sigma_3 & -\sigma_1 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & \frac{5AE}{4L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & \sigma_1 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_5 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & \sigma_6 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & \sigma_3 & \sigma_1 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & \sigma_6 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_1 & \sigma_3 & \sigma_1 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & \sigma_6 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_1 & \sigma_3 & \sigma_1 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & \sigma_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_1 & \sigma_3 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_5 \end{pmatrix}$$

$$\text{onde: } \sigma_1 = \frac{\sqrt{3}AE}{4L}; \quad \sigma_2 = -\frac{AE}{4L}; \quad \sigma_3 = -\frac{3AE}{4L}; \quad \sigma_4 = -\frac{AE}{L}; \quad \sigma_5 = \frac{3AE}{2L} \text{ e}$$

$$\sigma_6 = \frac{5AE}{2L}$$

O vetor global de forças também terá as posições 1, 2 e 12 eliminadas devido aos deslocamentos nulos nestes graus de liberdade, assim o vetor terá ordem 19x1

$$\{P\} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \text{ kN}$$

O sistema de equações finais a ser resolvido, obedecerá a relação (FILHO, 2013):

$$\{P\} = [K^G] \cdot \{\delta\} \quad (1)$$

onde  $\{P\}$  é o vetor de forças global,  $[K^G]$  é a matriz de rigidez estrutural e  $\{\delta\}$  é o vetor de deslocamentos nodais.

### Determinação dos deslocamentos nodais

Para a determinação dos deslocamentos nodais pode-se reescrever a relação (2) da seguinte forma:  $\{\delta\} = [K^G]^{-1} \cdot \{P\}$ . Assim, invertendo a matriz de rigidez estrutural e substituindo os parâmetros E, A e L pelos valores dados na tabela 1 com o auxílio do software MATLAB, encontra-se o seguinte vetor de deslocamentos nodais em milímetros de ordem 19x1:

Figura 5 - Vetor deslocamento calculado com o software MATLAB

	1
1	0.0235
2	-0.4336
3	0.0939
4	-0.7588
5	0.2112
6	-0.7588
7	0.2816
8	-0.4336
9	0.3051
10	0.2934
11	-0.2236
12	0.2464
13	-0.6165
14	0.1526
15	-0.8469
16	0.0587
17	-0.6165
18	0.0117
19	-0.2236

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

A tabela a seguir exibe os valores dos deslocamentos nodais associados aos seus respectivos graus de liberdade (GL) para a melhor compreensão do leitor. O valor destacado em vermelho, se refere ao deslocamento nodal máximo relativo à posição da aplicação da carga concentrada de -10 kN

Tabela 2 - Deslocamentos nodais

Nó	GL	Método Matricial (mm)	Nó	GL	Método Matricial (mm)
1	1	0	6	12	0
	2	0	7	13	0,2934
2	3	0,0235		14	-0,2236
	4	-0,4336	8	15	0,2464
3	5	0,0939		16	-0,6165
	6	-0,7588	9	17	0,1526
4	7	0,2112		18	<b>-0,8469</b>
	8	-0,7588	10	19	0,0587
5	9	0,2816		20	-0,6165
	10	-0,4336	11	21	0,0117
6	11	0,3051		22	-0,2236

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

## Reações de apoio

O vetor força contendo a magnitude das reações de apoio, foi obtido a partir da equação (2) excluindo as colunas 1, 2, 12 da matriz de rigidez de ordem 22, devido aos deslocamentos nulos nestas posições, gerando uma matriz de ordem 22x19. Assim, a nova matriz 22x19 foi multiplicada ao vetor deslocamento exibido na figura 5, obtendo-se o seguinte vetor de forças de ordem 22x1 em Newtons:

Figura 6 - Vetor força calculado com o software MATLAB

$10^4 \times$	1
1	0.0000
2	0.5000
3	0.0000
4	0.0000
5	-0.0000
6	-0.0000
7	-0.0000
8	-0.0000
9	0.0000
10	-0.0000
11	-0.0000
12	0.5000
13	0.0000
14	0.0000
15	-0.0000
16	0.0000
17	-0.0000
18	-1.0000
19	0.0000
20	-0.0000
21	-0.0000
22	0.0000

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Da figura 6, os valores indicados nas linhas 1, 2 e 12 se referem às reações, enquanto o valor exibido na linha 18 se refere a carga concentrada aplicada na treliça de 10 kN verticalmente para baixo.

### Tensões e deformações

Conhecidos os deslocamentos nodais mostrados na tabela 3, utilizam-se as expressões (3), (4) e (5) para a obtenção das tensões ( $\sigma$ ), deformações ( $\varepsilon$ ) e esforços axiais ( $F$ ), em cada elemento respectivamente. (BITTENCOURT, 2014)

$$\sigma = \frac{E}{L} [-\cos\theta \quad -\sin\theta \quad \sin\theta \quad \cos\theta] \cdot \{\delta\} \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{L} [-\cos\theta \quad -\sin\theta \quad \sin\theta \quad \cos\theta] \cdot \{\delta\} \quad (3)$$

$$F = \frac{EA}{L} [-\cos\theta \quad -\sin\theta \quad \sin\theta \quad \cos\theta] \cdot \{\delta\} \quad (4)$$

Assim, tem-se, com o auxílio do MATLAB, os valores determinados das referidas grandezas para cada elemento, apresentados na tabela a seguir.

*Tabela 3 - Esforços, tensões e deformações normais nos elementos da treliça pelo método matricial*

Elemento	Incidência	Tensão Normal (MPa)	Deformação ( $10^{-5}$ mm/mm)	Esforço Axial (N)
1	1-2	2,4056	1,1735	2886,72
2	2-3	7,2169	3,5204	8660,28
3	3-4	12,0281	5,8674	14433,72
4	4-5	7,2169	3,5204	8660,28
5	5-6	2,4056	1,1735	2886,72
6	1-7	-4,8113	-2,3470	-5773,56
7	2-7	4,8113	2,3470	5773,56
8	2-8	-4,8113	-2,3470	-5773,56
9	3-8	4,8113	2,3470	5773,56
10	3-9	-4,8113	-2,3470	-5773,56
11	4-9	-4,8113	2,3470	-5773,56
12	4-10	4,8113	-2,3470	5773,56
13	5-10	-4,8113	2,3470	-5773,56
14	5-11	4,8113	-2,3470	5773,56
15	6-11	-4,8113	2,3470	-5773,56
16	7-8	-4,8113	-2,3470	-5773,56
17	8-9	-9,6225	-4,6939	-11547,00
18	9-10	-9,6225	-4,6939	-11547,00
19	10-11	-4,8113	2,3470	-5773,56

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021

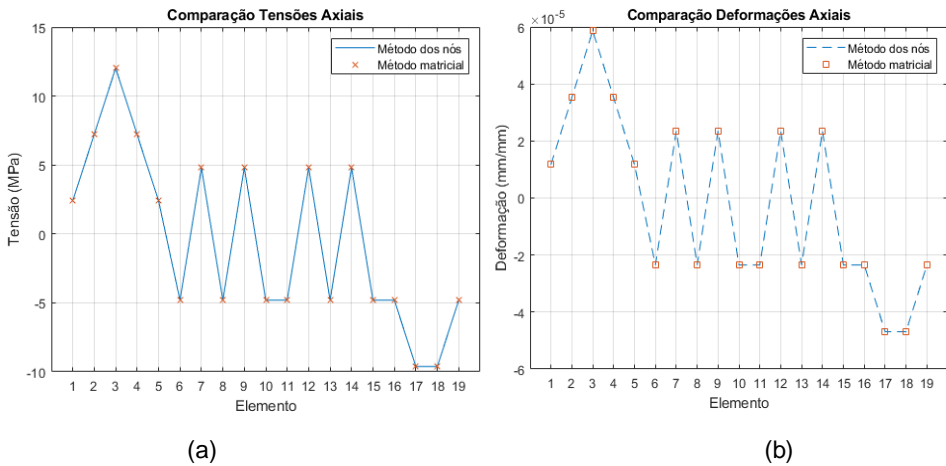
Para fins de comparação, as grandezas exibidas na tabela 3 também foram obtidas utilizando o método dos nós, por ser um método clássico que consiste na verificação do equilíbrio de forças para cada nó conhecendo-se as reações de apoio.

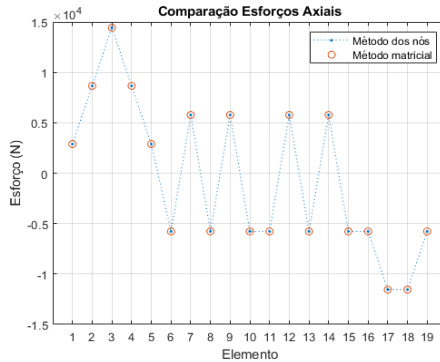
Comparando os resultados, nota-se que a magnitude das grandezas tensão, deformação e esforço axial determinadas analiticamente, tanto pelo método dos nós quanto pelo método matricial, convergiram como o esperado.

A figura a seguir mostra uma comparação visual das intensidades obtidas destas grandezas nos dois métodos citados. Observa-se que os elementos de 1 a 5 (banzos inferiores) estão tracionados e consequentemente sofrendo um alongamento, enquanto nos elementos de 16 a 19 (banzos superiores), acontece o inverso. Já nos elementos de 6 a 10 (diagonais) tem-se os elementos pares sob compressão e consequentemente sofrendo uma deformação por encurtamento e o inverso para os elementos ímpares. Devido a simetria da treliça, nota-se o oposto para os elementos diagonais de 11 a 15.

Figura 7 - Comparação visual das grandezas obtidas pelos métodos dos nós e matricial.

(a) Tensões; (b) Deformações e (c) Esforços axiais





(c)

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

## MODELAGEM COMPUTACIONAL

Os modelos numéricos da treliça apresentados a seguir, foram realizados no software ANSYS usando a linguagem APDL, a partir de técnicas comuns de discretização com base no método dos elementos finitos, considerando três tipos de elementos lineares: *LINK1*, *BEAM3* e *BEAM4*.

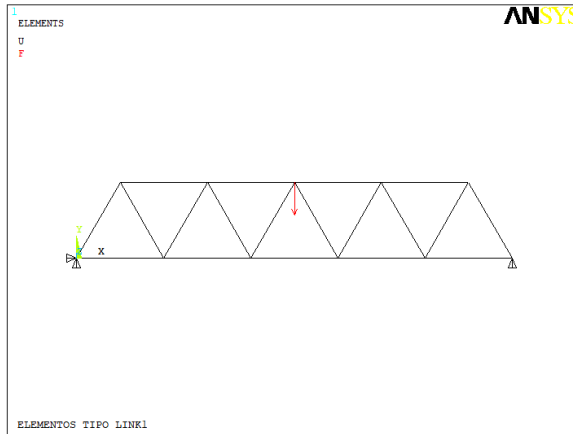
Para dar início à modelagem é necessário informar ao pré processador do software, o tipo de elemento (*LINK1*, *BEAM3* ou *BEAM4*) que será utilizado na discretização, bem como as propriedades geométricas e físicas dos elementos (TABELA 1) e ainda, as coordenadas dos nós, tomando como base a figura 1 e a incidência nodal dos elementos, para gerar a estrutura a ser analisada.

As condições de contorno tais como os apoios fixo (localizado no nó 1) e móvel (localizado no nó 6), bem como a carga concentrada de -10 kN (localizada no nó 9), são inseridas no módulo de solução do programa, para que sejam realizados os cálculos necessários da análise linear estática escolhida para este trabalho.

### Elemento LINK1

A partir das informações inseridas nos módulos /PREP7 e /SOLU (comandos que acessam os módulos de pré-processamento e solução respectivamente), tem-se na figura 8, a geometria da treliça discretizada com elementos tipo *LINK1*, a vinculação e carga aplicada.

Figura 8 - Modelo estrutural LINK1



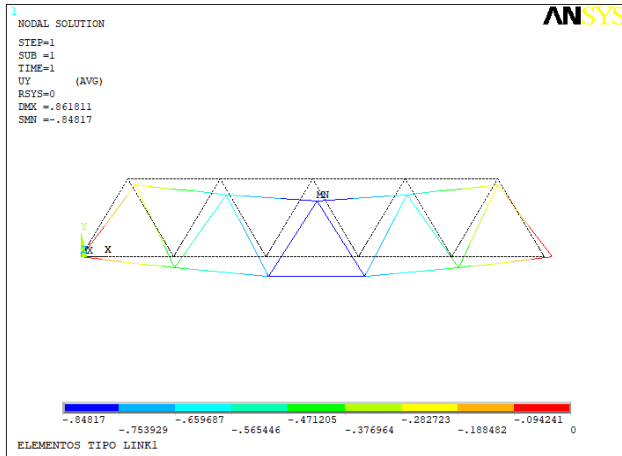
Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

As figuras a seguir mostram os resultados da análise linear estática dos parâmetros deslocamentos, esforços e tensões axiais solicitados no último módulo do programa com o comando /POST1.

As figuras 9 e 10 exibem a deformada da estrutura juntamente com a sua configuração indeformada para os eixos Y e X global enquanto a figura 11 mostra a janela de saída do programa com os valores obtidos para os deslocamentos nodais nos eixos X, Y e Z global, representados respectivamente por UX, UY e UZ, bem como o deslocamento nodal resultante, denominado USUM, além de destacar os valores máximos absolutos no eixo X, referente ao deslocamento imposto devido ao apoio móvel nó 6 e no eixo Y, relacionado à carga aplicada no nó 9.

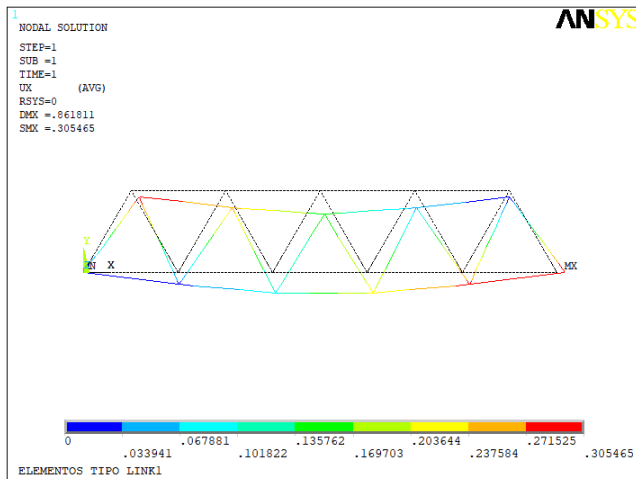
Já a figura 12, mostra o vetor de cargas nodais externas em Newtons, tal que em X os valores são desprezíveis, enquanto no eixo Y tem-se as forças referentes às reações de apoio nos nós 1 e 6, bem como a informação da carga aplicada no nó 9.

Figura 9 – Deformada da estrutura em Y global



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

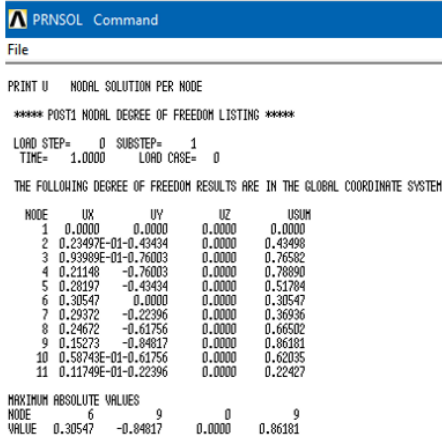
Figura 10 - Deformada da estrutura em X global



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

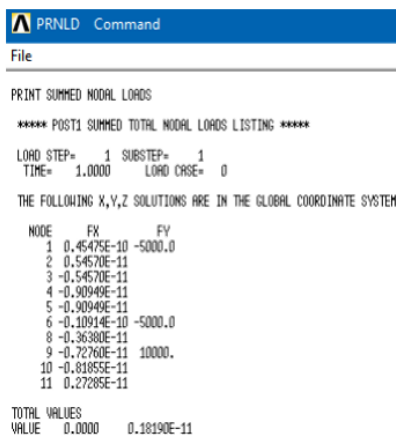


Figura 11 - Deslocamento nodal (mm)



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

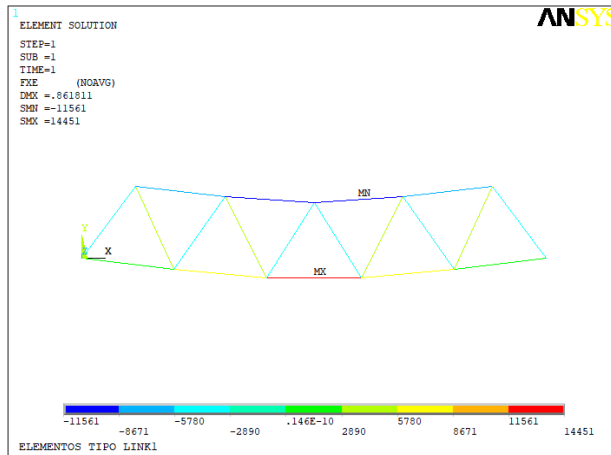
Figura 12 – Vetor de cargas (N)



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

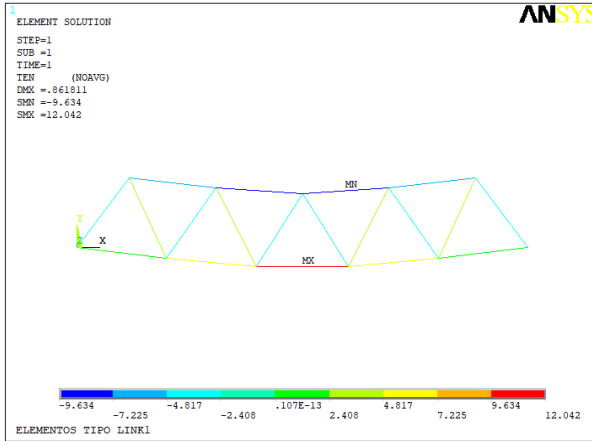
As figuras 13 e 14 mostram as distribuições de esforços (N) e tensões axiais (MPa) ao longo da treliça, respectivamente. O banzo inferior central vermelho indica tração máxima enquanto os banzos superiores em azul escuro sofrem máxima compressão.

Figura 13 – Esforços axiais (N)



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Figura 14 - Tensões axiais (MPa)



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

A figura 15 apresenta a janela de saída do ANSYS com as magnitudes dos esforços normais (N), representado por SNORMAL e das tensões axiais (MPa), representado por TEN de cada elemento que compõe a treliça, destacando os elementos com seus valores máximos e mínimos para estas grandezas.

Figura 15 - Vetores esforços (N) e tensões axiais (MPa)

PRETAB Command

File

PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT	CURRENT	CURRENT
ELEM	SNORMAL	TEN
1	2890.2	2.4085
2	8670.5	7.2254
3	14451.	12.042
4	8670.5	7.2254
5	2890.2	2.4085
6	-5775.2	-4.8127
7	5775.2	4.8127
8	-5775.2	-4.8127
9	5775.2	4.8127
10	-5775.2	-4.8127
11	-5775.2	-4.8127
12	5775.2	4.8127
13	-5775.2	-4.8127
14	5775.2	4.8127
15	-5775.2	-4.8127
16	-5780.3	-4.8170
17	-11561.	-9.6339
18	-11561.	-9.6339
19	-5780.3	-4.8170

MINIMUM VALUES		
ELEM	18	18
VALUE	-11561.	-9.6339

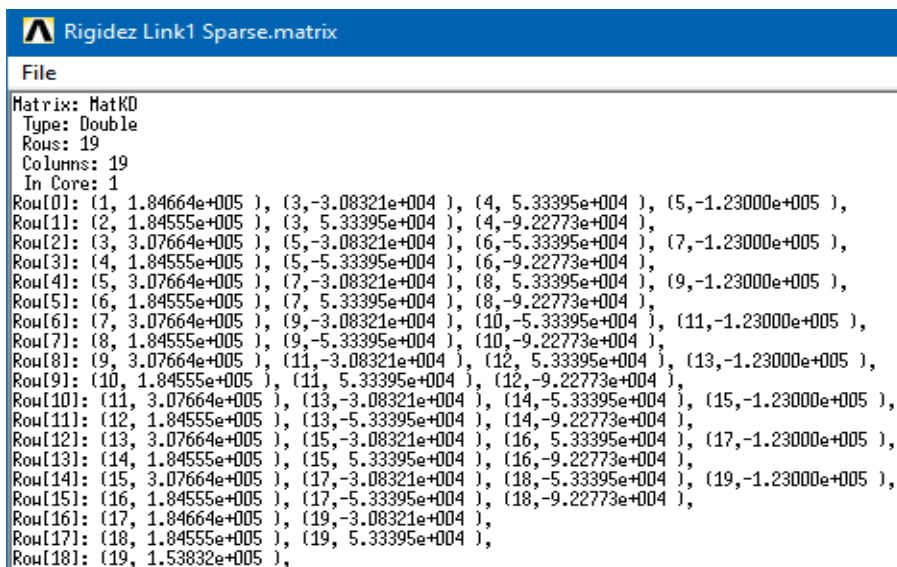
MAXIMUM VALUES		
ELEM	3	3
VALUE	14451.	12.042

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Lembrando que o elemento LINK1 possui 2 graus de liberdade por nó no eixo global e como a treliça estudada possui 11 nós, tem-se a matriz de rigidez quadrada de ordem 22 como mostrado com o método matricial para um elemento de treliça que tem como característica, graus de liberdade axial. Descontando os 3 graus de liberdade devido as restrições de apoios, como mostrado no cálculo analítico, a rigidez final será dada por uma matriz quadrada de ordem 19.

A matriz de rigidez gerada pelo software de ordem 19x19 como prevista, está apresentada na figura 16 no formato esparsa, lembrando que matrizes esparsas mostram apenas os elementos não nulos. Torna-se necessário destacar que a numeração dos GL no ANSYS é determinada internamente pelo algoritmo da solução e não corresponde ao adotado neste trabalho, logo os coeficientes que compõem a matriz de rigidez, embora tenham a mesma magnitude, ocupam posições diferentes na matriz quando comparados com a matriz de rigidez encontrada pelo método analítico.

Figura 1 - Matriz de rigidez gerada pelo ANSYS

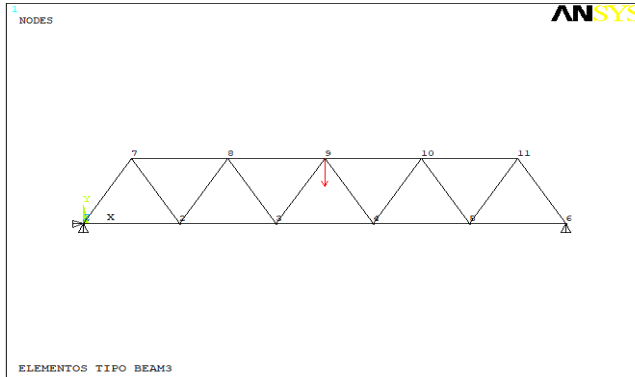


Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

## Elemento BEAM3

A modelagem computacional da treliça discretizada com elementos tipo *BEAM3* está mostrada na figura 17. Visualmente, não há diferença entre discretizar com elementos do tipo LINK1 ou BEAM3, como pode ser observado ao comparar as figuras 17 e 8. A diferença se dará ao realizar os cálculos para gerar os resultados.

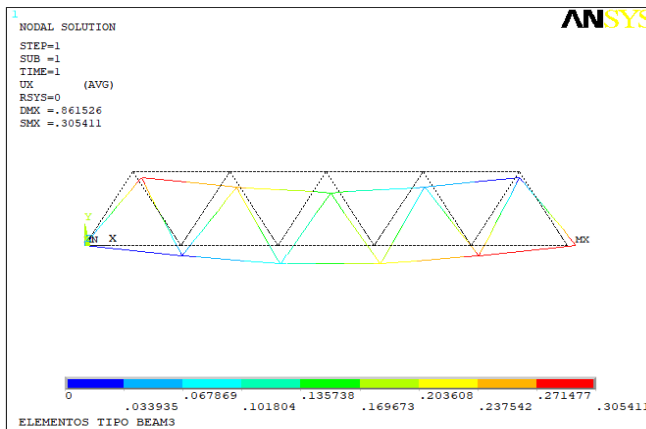
Figura 2 - Modelo estrutural BEAM3



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021

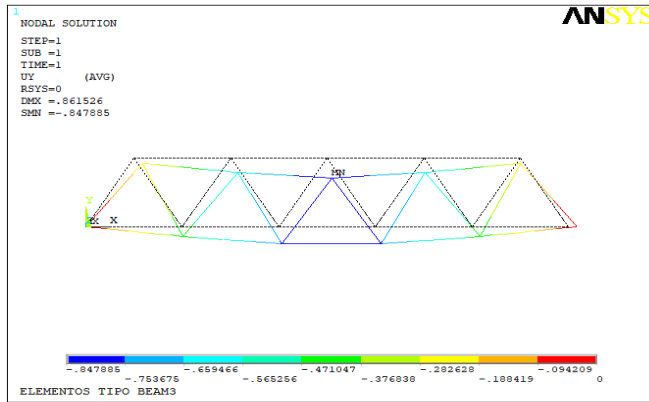
As figuras 18 e 19 exibem a deformada da estrutura juntamente com a sua configuração indeformada para os eixos X e Y global respectivamente e a figura 20 mostra a janela de saída do programa com os valores obtidos para os deslocamentos nodais nos eixos X, Y e Z global, bem como os deslocamentos resultantes com as mesmas representações descritas anteriormente, ou seja, UX, UY, UZ e USUM, além de destacar os valores máximos nos eixos X e Y, referentes ao apoio móvel no nó 6 e à carga aplicada no nó 9.

Figura 3 - Deformada da estrutura em X global



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Figura 4 - Deformada da estrutura em Y global



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Figura 20 - Deslocamento nodal (mm)

PRNSOL Command

File

```

PRINT U  NODAL SOLUTION PER NODE

**** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING ****

LOAD STEP= 1  SUBSTEP= 1
TIME= 1.000  LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM
    
```

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.23499E-01	-0.43423	0.0000	0.43487
3	0.93981E-01	-0.75979	0.0000	0.76558
4	0.21143	-0.75979	0.0000	0.78866
5	0.28191	-0.43423	0.0000	0.51772
6	0.30541	0.0000	0.0000	0.30541
7	0.29366	-0.22392	0.0000	0.36929
8	0.24667	-0.61739	0.0000	0.66484
9	0.15271	-0.84788	0.0000	0.86153
10	0.58738E-01	-0.61739	0.0000	0.62017
11	0.11750E-01	-0.22392	0.0000	0.22423

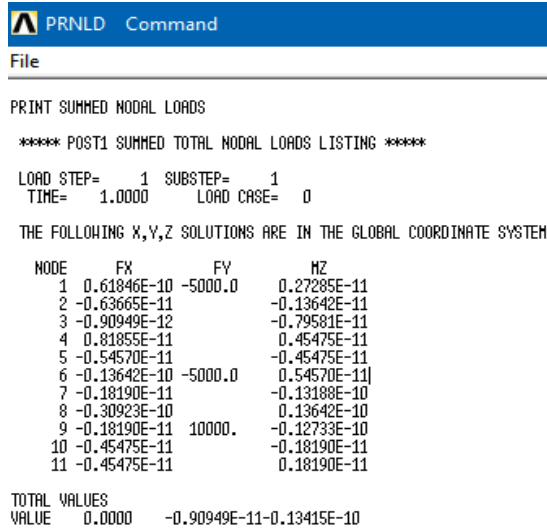
  

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES				
NODE	6	9	0	9
VALUE	0.30541	-0.84788	0.0000	0.86153

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Já a figura 21, mostra o vetor de cargas externas, tal que em X os valores das forças (N) são desprezíveis, enquanto no eixo Y tem-se as forças referentes às reações de apoio nos nós 1 e 6, bem como a informação da carga aplicada no nó 9. Como o elemento BEAM3 considera a rotação no eixo Z além da translação em seus graus de liberdade, tem-se também o parâmetro MZ (N.mm) gerado como resultado, apresentando valores desprezíveis, como pode ser observado.

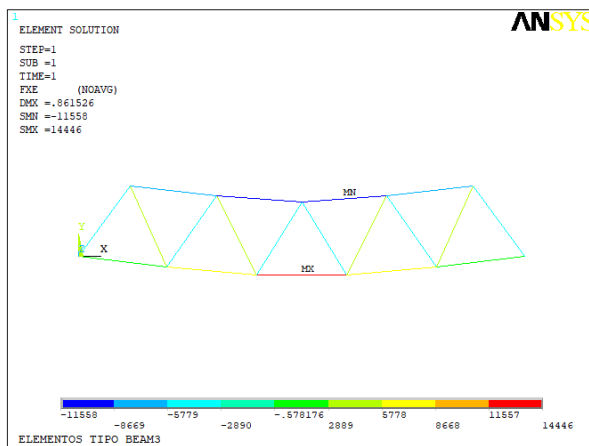
Figura 21 - Vetor de cargas externas nodais



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

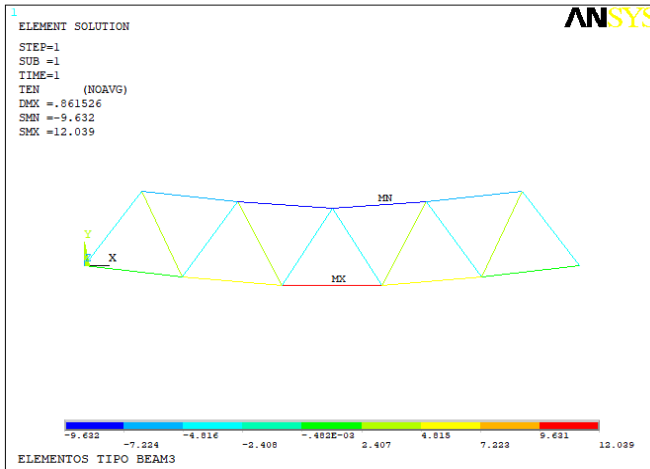
As figuras 22 e 23 mostram as distribuições de esforços (N) e tensões axiais (MPa) ao longo da treliça, respectivamente. Assim como na modelagem com o LINK1, o banzo inferior central vermelho indica tração máxima enquanto os banzos superiores em azul escuro sofrem máxima compressão.

Figura 22 - Esforços axiais (N)



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Figura 23 - Tensões axiais (MPa)



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Já na figura 24, tem-se a janela de saída do software ANSYS com as magnitudes dos esforços normais (N) e tensões axiais (MPa), representados por FXE e TEN respectivamente, de cada elemento que compõe a treliça, destacando os elementos com seus valores máximos e mínimos para estas grandezas. Nota-se que os resultados estão bem próximos das magnitudes obtidas com a discretização utilizando elementos do tipo LINK1 (FIGURA 15).

Figura 24 - Vetores esforços (N) e tensões axiais (MPa)

PRETAB Command

File

PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT

\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT ELEM	CURRENT FXE	CURRENT TEN
1	2890.4	2.4086
2	8669.3	7.2244
3	14446.	12.039
4	8669.3	7.2244
5	2890.4	2.4086
6	-5773.9	-4.8116
7	5771.6	4.8097
8	-5771.5	-4.8096
9	5770.3	4.8086
10	-5771.8	-4.8099
11	-5771.8	-4.8099
12	5770.3	4.8086
13	-5771.5	-4.8096
14	5771.6	4.8097
15	-5773.9	-4.8116
16	-5779.5	-4.8163
17	-11558.	-9.6317
18	-11558.	-9.6317
19	-5779.5	-4.8163

MINIMUM VALUES		
ELEM	18	18
VALUE	-11558.	-9.6317

MAXIMUM VALUES		
ELEM	3	3
VALUE	14446.	12.039

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

O elemento do tipo BEAM3 possui 3 graus de liberdade por nó no eixo global e como a treliça estudada possui 11 nós, tem-se a matriz de rigidez quadrada para este elemento de ordem 33. Descontando os 3 graus de liberdade devido as restrições de apoios, a rigidez final será dada por uma matriz de ordem 30x30. A figura 25 apresenta a matriz de rigidez gerada pelo software ANSYS no formato esparsos.

Figura 25 - Matriz de rigidez gerada pelo ANSYS

```

ANSYS Rigidize Beam3 Sparse.matrix
File
Matrix: MatK0
Type: Double
Rows: 30
Columns: 30
In Core: 1
Rout01: (1, 9.40138e+007 ), (2, 3.05635e+004 ), (3, -1.76668e+004 ), (4, 2.35139e+007 ), (6, -3.52395e+004 ), (7, 2.34930e+007 ),
Rout11: (2, 1.84717e+005 ), (4, 6.11270e+004 ), (5, -3.08585e+004 ), (6, 5.33241e+004 ), (7, 3.05635e+004 ), (8, -1.23000e+005 ),
Rout12: (3, 1.84607e+005 ), (4, 3.52395e+004 ), (5, 5.33241e+004 ), (6, -9.22861e+004 ), (7, 1.76668e+004 ), (9, -3.52395e+001 ), (10, 3.52395e+004 ),
Rout31: (4, 1.41042e+008 ), (5, -3.05635e+004 ), (6, -1.76668e+004 ), (7, 2.35139e+007 ), (9, -3.52395e+004 ), (10, 2.34930e+007 ),
Rout41: (5, 3.07717e+005 ), (7, -6.11270e+004 ), (8, -3.08585e+004 ), (9, -5.33241e+004 ), (10, -3.05635e+004 ), (11, -1.23000e+005 ),
Rout51: (6, 1.84643e+005 ), (8, -5.33241e+004 ), (9, -9.22861e+004 ), (10, 1.76668e+004 ), (12, -3.52395e+001 ), (13, 3.52395e+004 ),
Rout61: (7, 1.88028e+008 ), (8, 3.05635e+004 ), (9, -1.76668e+004 ), (10, 2.35139e+007 ), (12, -3.52395e+004 ), (13, 2.34930e+007 ),
Rout71: (8, 3.07717e+005 ), (10, 6.11270e+004 ), (11, -3.08585e+004 ), (12, 5.33241e+004 ), (13, 3.05635e+004 ), (14, -1.23000e+005 ),
Rout81: (9, 1.84643e+005 ), (11, 5.33241e+004 ), (12, -9.22861e+004 ), (13, 1.76668e+004 ), (15, -3.52395e+001 ), (16, 3.52395e+004 ),
Rout91: (10, 1.88028e+008 ), (11, -3.05635e+004 ), (12, -1.76668e+004 ), (13, 2.35139e+007 ), (15, -3.52395e+004 ), (16, 2.34930e+007 ),
Rout10: (11, 3.07717e+005 ), (13, -6.11270e+004 ), (14, -3.08585e+004 ), (15, -5.33241e+004 ), (16, -3.05635e+004 ), (17, -1.23000e+005 ),
Rout111: (12, 1.84643e+005 ), (14, 5.33241e+004 ), (15, -9.22861e+004 ), (16, 1.76668e+004 ), (18, -3.52395e+001 ), (19, 3.52395e+004 ),
Rout12: (13, 1.88028e+008 ), (14, 3.05635e+004 ), (15, -1.76668e+004 ), (16, 2.35139e+007 ), (18, -3.52395e+004 ), (19, 2.34930e+007 ),
Rout13: (14, 3.07717e+005 ), (16, 6.11270e+004 ), (17, -3.08585e+004 ), (18, 5.33241e+004 ), (19, 3.05635e+004 ), (20, -1.23000e+005 ),
Rout14: (15, 1.84643e+005 ), (17, 5.33241e+004 ), (18, -9.22861e+004 ), (19, 1.76668e+004 ), (21, -3.52395e+001 ), (22, 3.52395e+004 ),
Rout15: (16, 1.88028e+008 ), (17, -3.05635e+004 ), (18, -1.76668e+004 ), (19, 2.35139e+007 ), (21, -3.52395e+004 ), (22, 2.34930e+007 ),
Rout16: (17, 3.07717e+005 ), (19, -6.11270e+004 ), (20, -3.08585e+004 ), (21, -5.33241e+004 ), (22, -3.05635e+004 ), (23, -1.23000e+005 ),
Rout17: (18, 1.84643e+005 ), (20, -5.33241e+004 ), (21, -9.22861e+004 ), (22, 1.76668e+004 ), (24, -3.52395e+001 ), (25, 3.52395e+004 ),
Rout18: (19, 1.88028e+008 ), (20, 3.05635e+004 ), (21, -1.76668e+004 ), (22, 2.35139e+007 ), (24, -3.52395e+004 ), (25, 2.34930e+007 ),
Rout19: (20, 3.07717e+005 ), (22, 6.11270e+004 ), (23, -3.08585e+004 ), (24, 5.33241e+004 ), (25, 3.05635e+004 ), (26, -1.23000e+005 ),
Rout20: (21, 1.84643e+005 ), (23, 5.33241e+004 ), (24, -9.22861e+004 ), (25, 1.76668e+004 ), (27, -3.52395e+001 ), (28, 3.52395e+004 ),
Rout21: (22, 1.88028e+008 ), (23, -3.05635e+004 ), (24, -1.76668e+004 ), (25, 2.35139e+007 ), (27, -3.52395e+004 ), (28, 2.34930e+007 ),
Rout22: (23, 3.07717e+005 ), (25, -6.11270e+004 ), (26, -3.08585e+004 ), (27, -5.33241e+004 ), (28, -3.05635e+004 ), (29, -1.23000e+005 ),
Rout23: (24, 1.84643e+005 ), (26, -5.33241e+004 ), (27, -9.22861e+004 ), (28, 1.76668e+004 ), (30, 3.52395e+004 ),
Rout24: (25, 1.88028e+008 ), (26, 3.05635e+004 ), (27, -1.76668e+004 ), (28, 2.35139e+007 ), (30, 2.34930e+007 ),
Rout25: (26, 1.84717e+005 ), (28, 6.11270e+004 ), (29, -3.08585e+004 ), (30, 3.05635e+004 ),
Rout26: (27, 1.84607e+005 ), (28, -3.52395e+004 ), (29, 5.33241e+004 ), (30, 1.76668e+004 ),
Rout27: (28, 1.41042e+008 ), (29, 3.05635e+004 ), (30, 2.35139e+007 ),
Rout28: (29, 1.53859e+005 ), (30, -3.05635e+004 ),
Rout29: (30, 9.40138e+007 ),

```

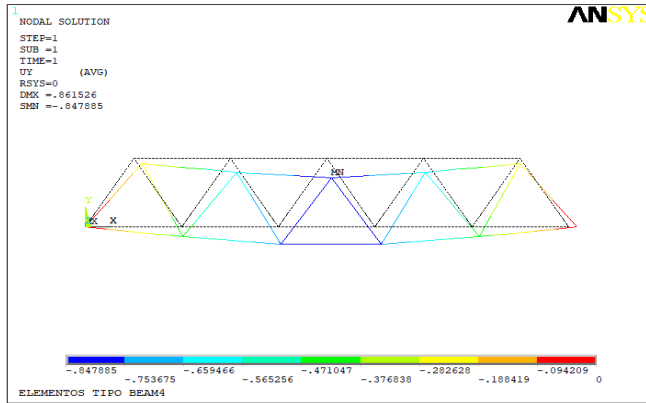
Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

## Elemento BEAM4

Assim como com os outros elementos, não há diferença visual no modelo estrutural entre discretizar a treliça utilizando elementos dos tipos LINK1, BEAM3 ou BEAM4. A grande diferença se dará ao realizar os cálculos e no esforço computacional empregado para gerar os resultados. As figuras 26 e 27 exibem a deformada da estrutura juntamente com a sua configuração indeformada para os eixos Y e X global respectivamente e a figura 28 mostra a janela de saída do programa com os valores obtidos para os deslocamentos nodais.

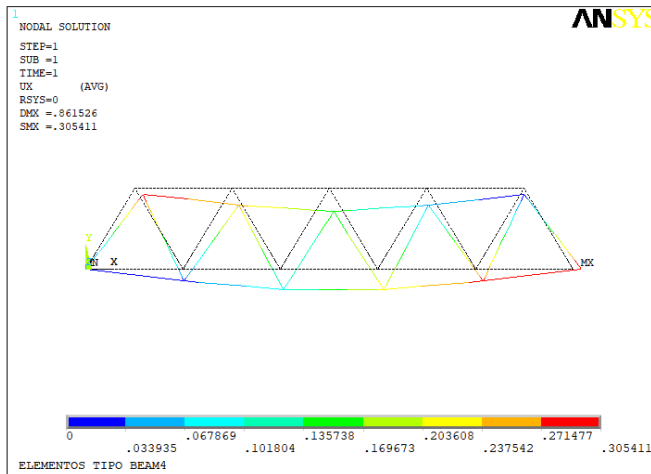


Figura 26 – Deformada da estrutura em Y global



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Figura 27 – Deformada da estrutura em X global



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Figura 28 - Deslocamento nodal (mm)

```

PRNSOL Command
File
PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE
**** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING ****
LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

```

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.23499E-01	-0.43423	0.0000	0.43487
3	0.93981E-01	-0.75979	0.0000	0.76558
4	0.21143	-0.75979	0.0000	0.78866
5	0.28191	-0.43423	0.0000	0.51772
6	0.30541	0.0000	0.0000	0.30541
7	0.29366	-0.22392	0.0000	0.36929
8	0.24667	-0.61739	0.0000	0.66484
9	0.15271	-0.84788	0.0000	0.86153
10	0.58738E-01	-0.61739	0.0000	0.62017
11	0.11750E-01	-0.22392	0.0000	0.22423

```

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE 6 9 0 9
VALUE 0.30541 -0.84788 0.0000 0.86153

```

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Já a figura 29, mostra o vetor de cargas nodais, tal que em X os valores das forças (N) são desprezíveis, enquanto no eixo Y tem-se as forças referentes às reações de apoio nos nós 1 e 6, bem como a informação da carga aplicada no nó 9. Como o elemento BEAM4 considera a rotação na eixos X, Y e Z, além da translação em seus graus de liberdade, tem-se também os parâmetros MX, MY e MZ (N.mm) gerado como resultado, apresentando ausência de valores ou valores desprezíveis, como pode ser observado.

Figura 29 – Vetor de cargas nodais

```

PRNLD Command
File
PRINT SUMMED NODAL LOADS
**** POST1 SUMMED TOTAL NODAL LOADS LISTING ****
LOAD STEP= 0 SUBSTEP= 1
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0
THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

```

NODE	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
1	0.31378E-10	-5000.0				0.22737E-11
2	-0.18190E-11					
3	-0.63665E-11					-0.24102E-10
4	-0.19099E-10					-0.68212E-11
5	-0.25466E-10					-0.12278E-10
6	-0.27285E-11	-5000.0				0.90949E-12
7	-0.18190E-11					-0.45475E-11
8	0.54570E-11					-0.90949E-11
9	0.36380E-11	10000.				-0.45475E-11
10	0.12733E-10					0.90949E-12
11	0.36380E-11					0.27285E-11

```

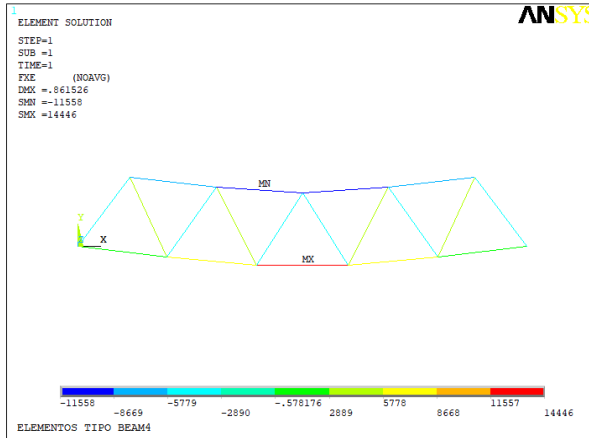
TOTAL VALUES
VALUE -0.45475E-12 -0.25466E-10 0.0000 0.0000 0.0000 -0.54570E-10

```

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021

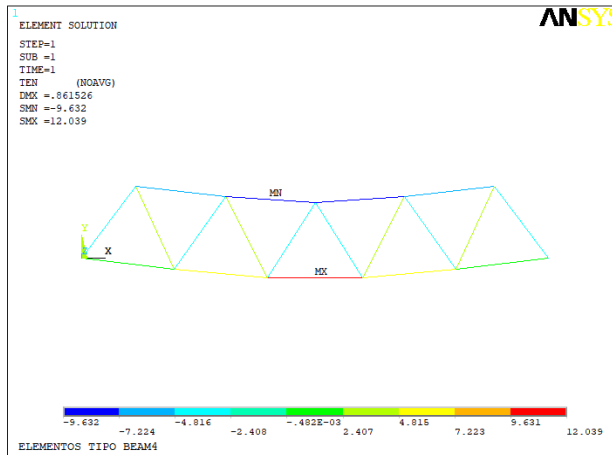
As figuras 30 e 31 mostram as distribuições de esforços (N) e tensões axiais (MPa) ao longo da treliça respectivamente. Assim como nas modelagens com elementos dos tipos LINK1 e BEAM3, o banzo inferior central vermelho indica tração máxima enquanto os banzos superiores em azul sofrem máxima compressão.

Figura 30 – Esforços axiais (N)



Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Figura 31 - Tensões axiais (MPa)

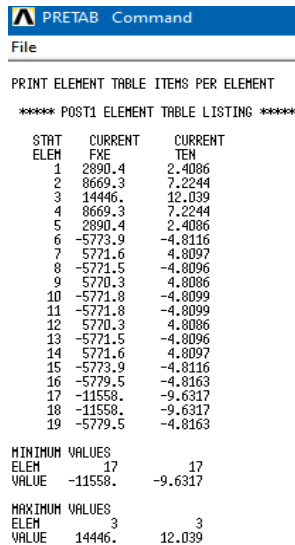


Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Já na figura 32, tem-se a janela de saída do software ANSYS com as magnitudes dos esforços normais (N) e tensões axiais (MPa), representados

por FXE e TEN respectivamente de cada elemento que compõe a treliça, destacando os elementos com seus valores máximos e mínimos para estas grandezas. Nota-se que os resultados são exatamente as mesmas magnitudes obtidas com a discretização utilizando elementos do tipo BEAM3 (FIGURA 24).

Figura 32 - Vetores esforços (N) e tensões axiais (MPa)



```

PRETAB Command
File
-----
PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT
***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING *****

```

STAT ELEM	CURRENT FXE	CURRENT TEN
1	2890.4	2.4086
2	8669.3	7.2244
3	14446.	12.039
4	8669.3	7.2244
5	2890.4	2.4086
6	-5773.9	-4.8116
7	5771.6	4.8097
8	-5771.5	-4.8096
9	5770.3	4.8086
10	-5771.8	-4.8099
11	-5771.8	-4.8099
12	5770.3	4.8086
13	-5771.5	-4.8096
14	5771.6	4.8097
15	-5773.9	-4.8116
16	-5779.5	-4.8163
17	-11558.	-9.6317
18	-11558.	-9.6317
19	-5779.5	-4.8163

MINIMUM VALUES		
ELEM	17	17
VALUE	-11558.	-9.6317

MAXIMUM VALUES		
ELEM	3	3
VALUE	14446.	12.039

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

O elemento do tipo BEAM4 possui 6 graus de liberdade por nó no eixo global e como a treliça estudada possui 11 nós, tem-se a matriz de rigidez quadrada para este elemento de ordem 66. Para manter as condições de contorno utilizadas nas modelagens anteriores, ou seja, o nó 1 totalmente restrito na translação e o nó 6 livre para transladar no eixo X, foi adotado restrição de translação espacial em X, Y e Z no nó 1 e restrição em Y e Z no nó 6. Assim, descontando os 5 graus de liberdade devido as restrições de apoios, a rigidez final será dada por uma matriz de ordem 61x61. A figura 33 apresenta a matriz de rigidez gerada pelo software ANSYS para a modelagem com elementos do tipo BEAM4 no formato esparsa.

Figura 33 - Matriz de rigidez gerada pelo ANSYS

```

Rigidez Beams Sparse matrix
File
Matrix: MatK0
Type: Double
Rows: 61
Columns: 61
In Core: 1
Row101: (1, 4.65507e+007), (2, -1.64573e+007), (6, -3.05635e+004), (7, 1.53600e+007), (8, -1.41062e+007), (13, -9.03577e+006),
Row111: (2, 6.55427e+007), (6, 1.76668e+004), (7, -1.41062e+007), (8, -8.89907e+005), (12, 3.52395e+004), (14, 2.34930e+007),
Row121: (3, 9.40138e+007), (4, 3.05635e+004), (5, -1.76668e+004), (9, 2.35139e+007), (11, -3.52395e+004), (15, 2.34930e+007),
Row131: (4, 1.84717e+005), (9, 6.11270e+004), (10, -3.08585e+004), (11, 5.33241e+004), (15, 3.05635e+004), (16, -1.23000e+005),
Row141: (5, 1.84607e+005), (9, 3.52395e+004), (10, 5.33241e+004), (11, -9.22861e+004), (15, 1.76668e+004), (17, -3.52395e+001), (21, 3.52395e+004),
Row151: (6, 1.05070e+002), (7, -6.11270e+004), (8, -3.52395e+004), (12, -3.53335e+001), (13, -3.05635e+004), (14, -1.76668e+004), (18, -3.52395e+001), (20, -3.52395e+004),
Row161: (7, 8.40655e+007), (12, 3.05635e+004), (13, 1.53600e+007), (14, 1.41062e+007), (19, -9.03577e+006),
Row171: (8, 8.40993e+007), (12, 1.76668e+004), (13, 1.41062e+007), (14, -8.89907e+005), (18, 3.52395e+004), (20, 2.34930e+007),
Row181: (9, 1.41042e+008), (10, -3.05635e+004), (11, -1.76668e+004), (15, 2.35139e+007), (17, -3.52395e+004), (21, 2.34930e+007),
Row191: (10, 3.07717e+005), (15, -6.11270e+004), (16, -3.08585e+004), (17, -5.33241e+004), (21, -3.05635e+004), (22, -1.23000e+005),
Row101: (11, 1.84643e+005), (16, -5.33241e+004), (17, -9.22861e+004), (21, 1.76668e+004), (23, -3.52395e+001), (27, 3.52395e+004),
Row111: (12, 1.41146e+002), (13, 6.11270e+004), (18, -3.53335e+001), (19, -3.05635e+004), (20, -1.76668e+004), (24, -3.52395e+001), (26, -3.52395e+004),
Row121: (13, 9.21013e+007), (18, 3.05635e+004), (19, 1.53600e+007), (21, -1.41062e+007), (22, -9.03577e+006),
Row131: (14, 1.31085e+008), (18, 1.76668e+004), (19, -1.41062e+007), (20, -8.89907e+005), (24, 3.52395e+004), (26, 2.34930e+007),
Row141: (15, 1.88028e+008), (16, 3.05635e+004), (17, -1.76668e+004), (21, 2.35139e+007), (23, -3.52395e+004), (27, 2.34930e+007),
Row151: (16, 3.07717e+005), (21, 6.11270e+004), (22, -3.08585e+004), (23, 5.33241e+004), (27, 3.05635e+004), (28, -1.23000e+005),
Row161: (17, 1.84643e+005), (22, 5.33241e+004), (23, -9.22861e+004), (27, 1.76668e+004), (29, -3.52395e+001), (33, 3.52395e+004),
Row171: (18, 1.41146e+002), (19, -6.11270e+004), (24, -3.53335e+001), (25, -3.05635e+004), (26, -1.76668e+004), (30, -3.52395e+001), (32, -3.52395e+004),
Row181: (19, 9.21013e+007), (24, 3.05635e+004), (25, 1.53600e+007), (26, 1.41062e+007), (26, 1.41062e+007), (31, -9.03577e+006),
Row191: (20, 1.31085e+008), (24, 1.76668e+004), (25, 1.41062e+007), (26, -8.89907e+005), (30, 3.52395e+004), (32, 2.34930e+007),
Row201: (21, 1.88028e+008), (22, -3.05635e+004), (23, -1.76668e+004), (27, 2.35139e+007), (29, -3.52395e+004), (33, 2.34930e+007),
Row211: (22, 3.07717e+005), (27, -6.11270e+004), (28, -3.08585e+004), (29, -5.33241e+004), (33, -3.05635e+004), (34, -1.23000e+005),
Row221: (23, 1.84643e+005), (28, 5.33241e+004), (29, -9.22861e+004), (33, 1.76668e+004), (35, -3.52395e+001), (39, 3.52395e+004),
Row231: (24, 1.41146e+002), (25, 6.11270e+004), (30, -3.53335e+001), (31, 3.05635e+004), (32, -1.76668e+004), (36, -3.52395e+001), (38, -3.52395e+004),
Row241: (25, 9.21013e+007), (30, -3.05635e+004), (31, 1.53600e+007), (32, -1.41062e+007), (37, -9.03577e+006),
Row251: (26, 1.84643e+005), (30, 1.76668e+004), (31, -1.41062e+007), (32, -8.89907e+005), (36, 3.52395e+004), (38, 2.34930e+007),
Row261: (27, 1.88028e+008), (28, 3.05635e+004), (29, -1.76668e+004), (33, 2.35139e+007), (35, -3.52395e+004), (39, 2.34930e+007),
Row271: (28, 3.07717e+005), (34, -6.11270e+004), (35, -3.08585e+004), (36, 5.33241e+004), (39, -3.05635e+004), (40, -1.23000e+005),
Row281: (29, 1.84643e+005), (34, 5.33241e+004), (35, -9.22861e+004), (39, 1.76668e+004), (41, -3.52395e+001), (45, 3.52395e+004),
Row291: (30, 1.41146e+002), (31, -6.11270e+004), (36, -3.53335e+001), (37, -3.05635e+004), (38, -1.76668e+004), (42, -3.52395e+001), (44, -3.52395e+004),
Row301: (31, 9.21013e+007), (36, 3.05635e+004), (37, 1.53600e+007), (38, 1.41062e+007), (43, -9.03577e+006),
Row311: (32, 1.31085e+008), (36, 1.76668e+004), (37, 1.41062e+007), (38, -8.89907e+005), (42, 3.52395e+004), (44, 2.34930e+007),
Row321: (33, 1.88028e+008), (34, -3.05635e+004), (35, -1.76668e+004), (39, 2.35139e+007), (41, 3.52395e+004), (46, 2.34930e+007),
Row331: (34, 3.07717e+005), (39, -6.11270e+004), (40, -3.08585e+004), (41, -5.33241e+004), (45, -3.05635e+004), (47, -3.52395e+001), (50, -3.52395e+004),
Row341: (35, 1.84643e+005), (40, -5.33241e+004), (41, -9.22861e+004), (45, 1.76668e+004), (46, -3.52395e+001), (51, 3.52395e+004),
Row351: (36, 1.41146e+002), (37, 6.11270e+004), (42, -3.53335e+001), (43, -3.05635e+004), (44, -1.76668e+004), (48, -3.52395e+001), (50, -3.52395e+004),
Row361: (37, 9.21013e+007), (42, -3.05635e+004), (43, 1.53600e+007), (44, -1.41062e+007), (49, -9.03577e+006),
Row371: (38, 1.31085e+008), (42, 1.76668e+004), (43, -1.41062e+007), (44, -8.89907e+005), (48, 3.05635e+004), (50, 2.34930e+007),
Row381: (39, 1.88028e+008), (40, 3.05635e+004), (41, -1.76668e+004), (45, 2.35139e+007), (47, -3.52395e+004), (51, 2.34930e+007),
Row391: (40, 3.07717e+005), (45, 6.11270e+004), (46, -3.08585e+004), (47, 5.33241e+004), (51, 3.05635e+004), (52, -1.23000e+005),
Row401: (41, 1.84643e+005), (46, 5.33241e+004), (47, -9.22861e+004), (51, 1.76668e+004), (53, -3.52395e+001), (57, 3.52395e+004),
Row411: (42, 1.41146e+002), (43, -6.11270e+004), (49, -3.53335e+001), (49, -3.05635e+004), (50, -1.76668e+004), (54, -3.52395e+001), (56, -3.52395e+004),
Row421: (43, 9.21013e+007), (48, 3.05635e+004), (49, 1.53600e+007), (50, 1.41062e+007), (55, -9.03577e+006),
Row431: (44, 1.31085e+008), (48, 1.76668e+004), (49, 1.41062e+007), (50, -8.89907e+005), (54, 3.52395e+004), (56, 2.34930e+007),
Row441: (45, 1.88028e+008), (46, -3.05635e+004), (47, -1.76668e+004), (51, 2.35139e+007), (53, -3.52395e+004), (57, 2.34930e+007),
Row451: (46, 3.07717e+005), (51, -6.11270e+004), (52, -3.08585e+004), (53, -5.33241e+004), (57, -3.05635e+004), (58, -1.23000e+005),
Row461: (47, 1.84643e+005), (52, 5.33241e+004), (53, -9.22861e+004), (57, 1.76668e+004), (61, 3.52395e+004),
Row471: (48, 1.41146e+002), (49, 6.11270e+004), (54, -3.53335e+001), (55, 3.05635e+004), (56, -1.76668e+004), (60, -3.52395e+004),
Row481: (49, 9.21013e+007), (54, -3.05635e+004), (55, 1.53600e+007), (56, -1.41062e+007), (59, -9.03577e+006),
Row491: (50, 1.31085e+008), (54, 1.76668e+004), (55, -1.41062e+007), (56, -8.89907e+005), (60, 2.34930e+007),
Row501: (51, 1.88028e+008), (52, 3.05635e+004), (53, -1.76668e+004), (57, 2.35139e+007), (61, 2.34930e+007),
Row511: (52, 1.84717e+005), (57, 6.11270e+004), (58, 3.53335e+001), (62, 3.05635e+004),
Row521: (53, 1.84607e+005), (57, -3.52395e+004), (58, 5.33241e+004), (61, 1.76668e+004),
Row531: (54, 1.05070e+002), (55, -6.11270e+004), (56, 3.52395e+004), (59, -3.05635e+004), (60, -1.76668e+004),
Row541: (55, 8.40655e+007), (59, 1.53600e+007), (60, 1.41062e+007),
Row551: (56, 8.40993e+007), (59, 1.41062e+007), (60, -8.89907e+005),
Row561: (57, 1.41042e+008), (58, -3.05635e+004), (61, 2.35139e+007),
Row571: (58, 1.53859e+005), (61, -3.05635e+004),
Row581: (59, 4.65507e+007), (60, 1.64573e+007),
Row591: (60, 6.55427e+007),
Row601: (61, 9.40138e+007),

```

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

## RESULTADOS

Para efeito comparativo entre as modelagens numéricas desenvolvidas neste trabalho, bem como entre os métodos numérico e analítico para 2 graus de liberdade, foi utilizado o erro percentual que tem por finalidade expressar com uma porcentagem o quão próximo um valor obtido está de um valor esperado. Esta grandeza é dada pela seguinte relação:

$$\text{Erro}(\%) = \left| \frac{\text{Valor}_{\text{obtido}} - \text{Valor}_{\text{esperado}}}{\text{Valor}_{\text{esperado}}} \right| \cdot 100 \quad (5)$$

## MÉTODO MATRICIAL E MODELAGEM COMPUTACIONAL LINK1

O cálculo analítico desenvolvido a partir do método matricial para elementos de treliça, descreve a matemática por trás da modelagem numérica com elementos do tipo *LINK1*, uma vez que ambos são caracterizados por apresentarem dois graus de liberdade em cada nó. Assim, foram comparados os resultados obtidos dos deslocamentos nodais, esforços e tensões axiais entre estes dois métodos para concluir a análise linear elástica proposta neste trabalho.

### Deslocamentos nodais

As tabelas 4 e 5, comparam as magnitudes dos deslocamentos nodais nos eixos globais X e Y respectivamente dado em milímetros, por meio de seus erros percentuais, tomando como base o método matricial.

*Tabela 4 - Erro percentual do deslocamento em X global*

Nó	Deslocamento nodal no eixo X (mm)		
	Método Matricial	LINK1	Erro (%)
1	0	0	--
2	0,0235	0,023497	0,0128
3	0,0939	0,093989	0,0948
4	0,2112	0,211480	0,1326
5	0,2816	0,281970	0,1314
6	0,3051	0,305470	0,1213
7	0,2934	0,293720	0,1091
8	0,2464	0,246720	0,1299
9	0,1526	0,152730	0,0852
10	0,0587	0,058743	0,0733
11	0,0117	0,011749	0,4188

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

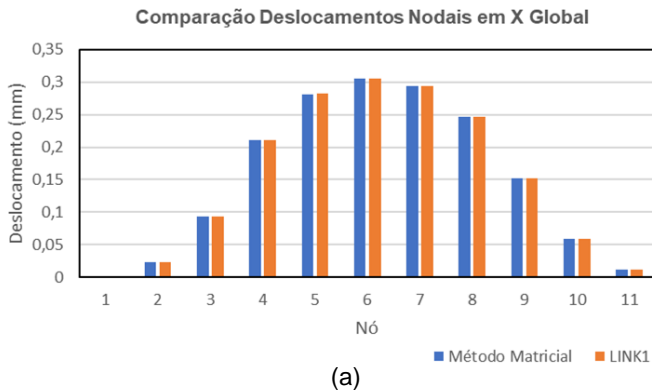
Tabela 5 - Erro percentual do deslocamento em Y global

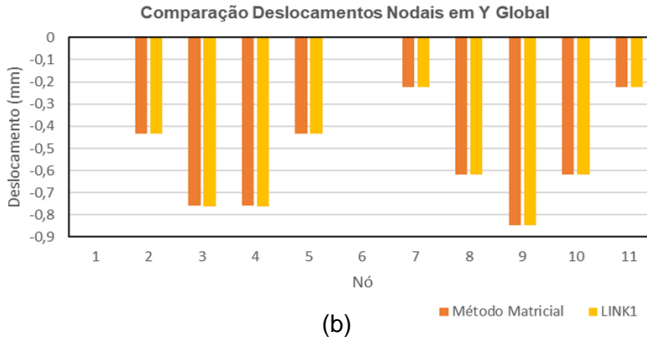
Nó	Deslocamento nodal no eixo Y (mm)		
	Método Matricial	LINK1	Erro (%)
1	0	0	--
2	-0,4336	-0,434340	0,1707
3	-0,7588	-0,760030	0,1621
4	-0,7588	-0,760030	0,1621
5	-0,4336	-0,434340	0,1707
6	0	0	--
7	-0,2236	-0,223960	0,1610
8	-0,6165	-0,617560	0,1719
9	-0,8469	-0,848170	0,1500
10	-0,6165	-0,617560	0,1719
11	-0,2236	-0,223960	0,1610

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

A figura 34 mostra a comparação visual dos deslocamentos nodais para os eixos globais X e Y a partir das magnitudes apresentadas nas tabelas 4 e 5. Observando os gráficos, percebe-se que os valores para esta grandeza obtidos, tanto pelo método matricial quanto pela modelagem com elementos LINK1, estão satisfatoriamente próximos o que é confirmado pelos baixos erros percentuais mostrados nas tabelas 4 e 5.

Figura 34 – Comparação gráfica dos deslocamentos nodais obtidos pelos métodos analítico e numérico LINK1. (a) Eixo X global e (b) Eixo Y global



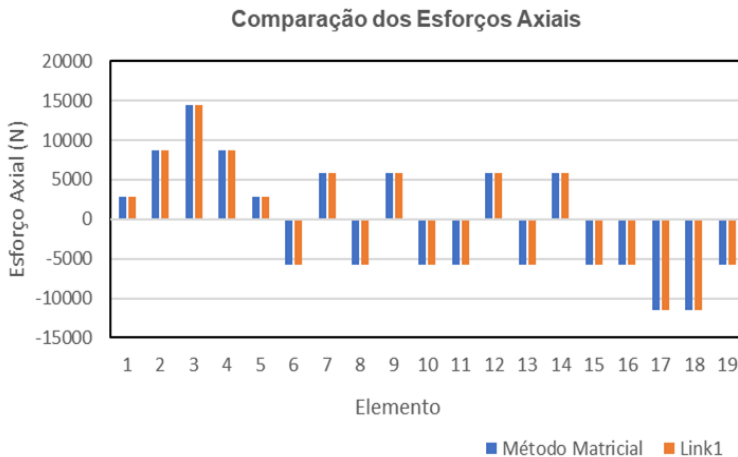


Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

### Esforços e tensões axiais

A figura 35 exibe a comparação gráfica das forças e tensões normais a partir das magnitudes apresentadas na tabela 6. Observando os gráficos percebe-se que os resultados obtidos para estas grandezas, tanto pelo método matricial quanto pela modelagem com elementos LINK1 estão convergentes, o que é confirmado pelos baixos erros percentuais mostrados na tabela 6.

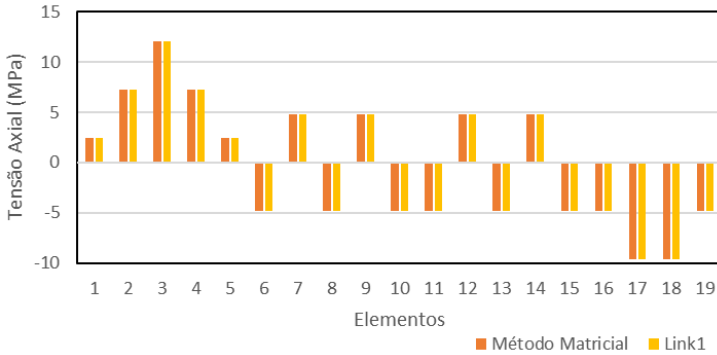
Figura 35 - Comparação gráfica dos esforços e tensões obtidos pelos métodos analítico e numérico LINK1. (a) Esforços e (b) Tensões axiais



(a)



### Comparação das Tensões Axiais



(b)

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Tabela 6 - Erro percentual dos esforços e tensões axiais

Elemento	Força Axial (N)			Tensão axial (MPa)		
	Método Matricial	LINK1	Erro (%)	Método Matricial	LINK1	Erro (%)
1	2886,72	2890,2	0,1206	2,4056	2,4085	0,1206
2	8660,28	8670,5	0,1180	7,2169	7,2254	0,1178
3	14433,72	14451,0	0,1197	12,0281	12,042	0,1156
4	8660,28	8670,5	0,1180	7,2169	7,2254	0,1178
5	2886,72	2890,2	0,1206	2,4056	2,4085	0,1206
6	-5773,56	-5775,2	0,0284	-4,8113	-4,8127	0,0291
7	5773,56	5775,2	0,0284	4,8113	4,8127	0,0291
8	-5773,56	-5775,2	0,0284	-4,8113	-4,8127	0,0291
9	5773,56	5775,2	0,0284	4,8113	4,8127	0,0291
10	-5773,56	-5775,2	0,0284	-4,8113	-4,8127	0,0291
11	-5773,56	-5775,2	0,0284	-4,8113	-4,8127	0,0291
12	5773,56	5775,2	0,0284	4,8113	4,8127	0,0291
13	-5773,56	-5775,2	0,0284	-4,8113	-4,8127	0,0291
14	5773,56	5775,2	0,0284	4,8113	4,8127	0,0291
15	-5773,56	-5775,2	0,0284	-4,8113	-4,8127	0,0291
16	-5773,56	-5780,3	0,1167	-4,8113	-4,8127	0,0291
17	-11547,00	-11561,0	0,1212	-9,6225	-9,6339	0,1185
18	-11547,00	-11561,0	0,1212	-9,6225	-9,6339	0,1185
19	-5773,56	-5780,3	0,1167	-4,8113	-4,8170	0,1185

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

## MODELAGENS NUMÉRICAS LINK1, BEAM3 E BEAM4

Além da análise comparativa entre o método analítico e o modelo numérico LINK1 que apresentaram resultados convergentes, foi realizado

também uma análise comparativa entre as modelagens LINK1, BEAM3 e BEAM4 com a finalidade de observar se a diferença dos graus de liberdade entre esses elementos traria diferenças significativas nos resultados quando aplicados a uma treliça. Já foi percebido que os valores das grandezas determinadas com os elementos BEAM3 e BEAM4 foram exatamente os mesmos e a única diferença na utilização destes elementos na modelagem, foi a ordem da matriz de rigidez e consequentemente no número do sistema de equações que o algoritmo interno do software precisou resolver.

### Deslocamentos nodais

A tabela 7, compara as magnitudes dos deslocamentos nodais nos eixos X e Y globais respectivamente, por meio de seus erros percentuais tomando como base o elemento LINK1.

Tabela 7 – Erro percentual do deslocamento em X e Y global

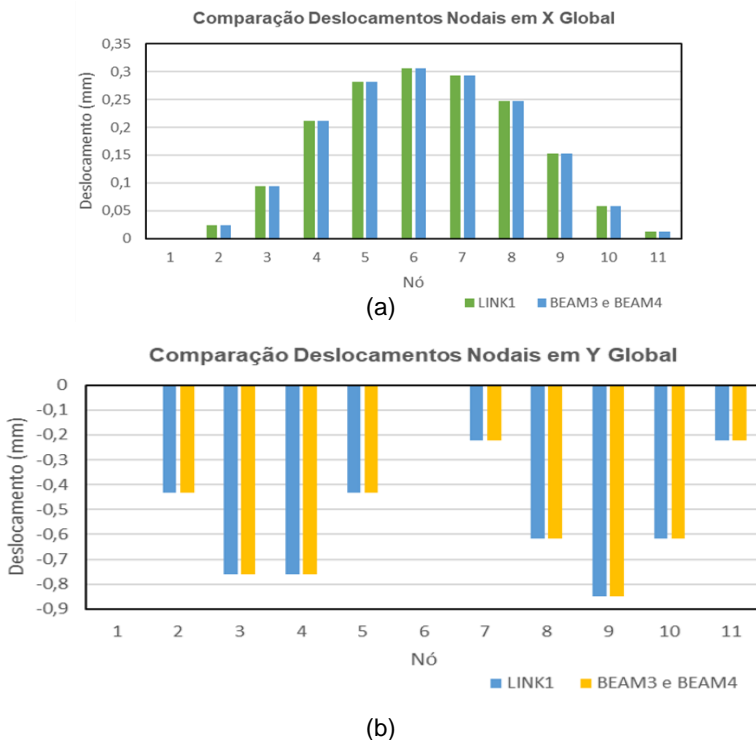
Nó	Deslocamento nodal no eixo X (mm)			Deslocamento nodal no eixo Y (mm)		
	LINK1	BEAM3 e BEAM4	Erro (%)	LINK1	BEAM3 e BEAM4	Erro (%)
1	0	0	--	0	0	--
2	0,023497	0,023499	0,0085	-0,43434	-0,43423	0,0253
3	0,093989	0,093981	0,0085	-0,76003	-0,75979	0,0316
4	0,21148	0,21143	0,0236	-0,76003	-0,75979	0,0316
5	0,28197	0,28191	0,0213	-0,43434	-0,43423	0,0253
6	0,30547	0,30541	0,0196	0	0	--
7	0,29372	0,29366	0,0204	-0,22396	-0,22392	0,0179
8	0,24672	0,24667	0,0203	-0,61756	-0,61739	0,0275
9	0,15273	0,15271	0,0131	-0,84817	-0,84788	0,0342
10	0,058743	0,058738	0,0085	-0,61756	-0,61739	0,0275
11	0,011749	0,01175	0,0085	-0,22396	-0,22392	0,0179

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

A figura 36 mostra a comparação gráfica dos deslocamentos nodais para os eixos globais X e Y a partir das magnitudes apresentadas na tabela 7. Observando os gráficos, percebe-se que os valores para esta grandeza obtidos a partir das modelagens numéricas, não apresentaram diferenças

significativas como confirmado pelos baixíssimos erros percentuais mostrados na tabela 7.

Figura 5 – Comparação gráfica dos deslocamentos nodais obtidos pelos métodos numéricos. (a) Eixo X global e (b) Eixo Y global

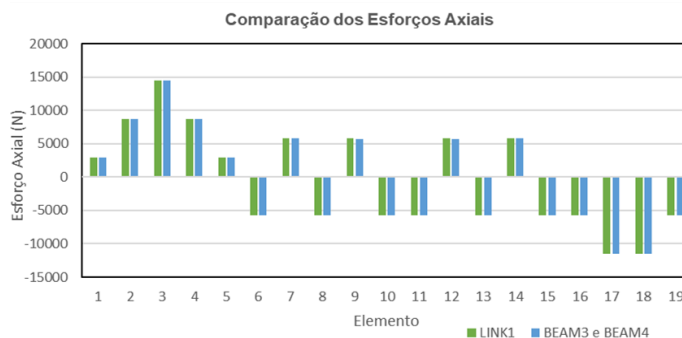


Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

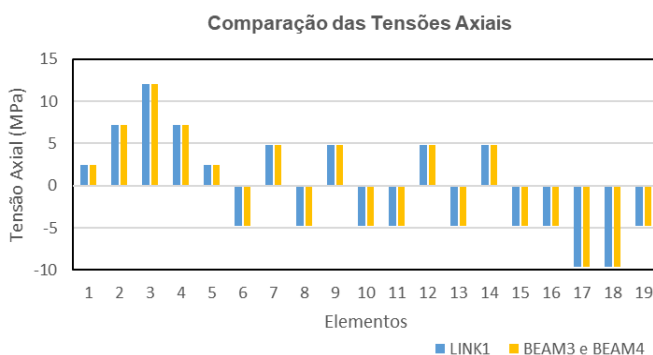
### Esforços e tensões axiais

A figura 37 exibe a comparação gráfica dos esforços e tensões axiais a partir das magnitudes apresentadas na tabela 8. Observando os gráficos percebe-se que os resultados obtidos para estas grandezas a partir das modelagens numéricas, apresentaram resultados próximos, o que é confirmado pelos pequenos erros percentuais mostrados na tabela 8.

Figura 37 - Comparação gráfica dos esforços e tensões obtidos pelos modelos numéricos. (a) Esforços e (b) Tensões axiais



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

Tabela 8 - Erro percentual dos esforços e tensões axiais

Elemento	Força Axial (N)			Tensão axial (MPa)		
	LINK1	BEAM3 e BEAM4	Erro (%)	LINK1	BEAM3 e BEAM4	Erro (%)
1	2890,2	2890,4	0,0069	2,4085	2,4086	0,0042
2	8670,5	8669,3	0,0138	7,2254	7,2244	0,0138
3	14451,0	14446	0,0346	12,042	12,039	0,0249
4	8670,5	8669,3	0,0138	7,2254	7,2244	0,0138
5	2890,2	2890,4	0,0069	2,4085	2,4086	0,0042
6	-5775,2	-5773,9	0,0225	-4,8127	-4,8116	0,0229
7	5775,2	5771,6	0,0623	4,8127	4,8097	0,0623
8	-5775,2	-5771,5	0,0641	-4,8127	-4,8096	0,0644
9	5775,2	5770,3	0,0848	4,8127	4,8086	0,0852
10	-5775,2	-5771,8	0,0589	-4,8127	-4,8099	0,0582

11	-5775,2	-5771,8	0,0589	-4,8127	-4,8099	0,0582
12	5775,2	5770,3	0,0848	4,8127	4,8086	0,0852
13	-5775,2	-5771,5	0,0641	-4,8127	-4,8096	0,0644
14	5775,2	5771,6	0,0623	4,8127	4,8097	0,0623
15	-5775,2	-5773,9	0,0225	-4,8127	-4,8116	0,0229
16	-5780,3	-5779,5	0,0138	-4,8127	-4,8163	0,0748
17	-11561,0	-11558	0,0259	-9,6339	-9,6317	0,0228
18	-11561,0	-11558	0,0259	-9,6339	-9,6317	0,0228
19	-5780,3	-5779,5	0,0138	-4,8170	-4,8163	0,0145

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2021.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise de uma estrutura simples como a treliça tanto pelo método analítico quanto pelo método numérico, permitiu demonstrar os pontos de atenção ao se implementar o método dos elementos finitos na obtenção da resposta estrutural de acordo com as condições de contorno impostas na estrutura.

O método matricial apresentou as etapas de cálculo para encontrar a matriz de rigidez de uma treliça com 19 graus de liberdade, demonstrando a robustez matemática que embasa o MEF, possibilitando destacar a importância da numeração dos elementos, dos nós e sobretudo dos graus de liberdade, uma vez que influenciam na posição dos coeficientes que compõem a matriz de rigidez. Com isso, foi demonstrado que a ordem da matriz de rigidez estrutural está diretamente conectada com os graus de liberdade dos elementos que discretizam o domínio, ou seja, quanto maior o grau de liberdade dos elementos, maior será a ordem desta matriz e conseqüentemente o esforço analítico e computacional para solução estrutural. Conhecendo a matriz e as equações que relacionam esforços e deslocamentos, tensões e deformações obteve-se os resultados destes parâmetros para a análise linear estática proposta neste trabalho de pesquisa.

Já as modelagens numéricas no software ANSYS com os elementos LINK1, BEAM3 e BEAM4, com graus de liberdade nodais 2, 3 e 6 respectivamente, permitiram a comparação da resposta estrutural que apresentaram resultados sem diferenças significativas entre os elementos. A diferença significativa entre as modelagens consiste no esforço computacional empregado para a realização dos cálculos, como foi visto ao gerar a matriz de rigidez quadrada de ordens 19, 30 e 61 para os respectivos tipos de elementos citados.

Um outro fator relevante na escolha adequada dos elementos para discretização são as propriedades do material, uma vez que a solicitação característica do elemento escolhido para a modelagem, pode gerar respostas incompletas nos resultados, dependendo do tipo de estrutura analisada.

Assim, se o projetista conhece as propriedades do material e o comportamento previsto da estrutura modelada, como no caso de uma treliça na qual atuam apenas esforços solicitantes e deformações axiais, bem como a teoria envolvida no MEF tal que elementos com maiores graus de liberdade, implicam em um maior esforço computacional desnecessariamente para este caso, o mesmo afirmará que o LINK1 é o elemento adequado para modelar a treliça de forma satisfatória com um menor consumo de tempo de processamento computacional.

Esse raciocínio pode ser expandido e corroborado para a modelagem de estruturas mais complexas em termos não apenas dos graus de liberdade mas também do número de elementos ou ainda na escolha de elementos com maior número de nós a ser utilizado na discretização, sabendo que esses fatores influenciam no grau de refinamento para a geração da malha, introduzindo um maior número de incógnitas e conseqüentemente um aumento no tempo de resposta computacional, que dependendo da análise poderá ser a diferença entre horas ou dias no processamento das soluções.

Portanto, fica evidenciado neste trabalho, a importância do entendimento teórico no que tange a mecânica das estruturas alinhado ao método numérico para garantir uma modelagem estrutural adequada utilizando o MEF, com a finalidade de convergir a máxima eficiência computacional e com resultados satisfatórios, baseado na escolha apropriada de elementos na discretização da estrutura analisada.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANSYS® Structural Analysis, Release 12.1, Help System. **Mechanical APDL Structural Analysis Guide**. ANSYS, Inc., Canonsburg, PA, 2009.

ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos – Primeiros Passos**. 3ª ed. Campinas: UNICAMP, 2020.

BITTENCOURT, M. L. **Análise Computacional de Estruturas**. 1ª ed. Campinas: UNICAMP, 2014.